

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE DERECHO**



**TESIS DOCTORAL**

**La teoría de la producción y la discontinuidad**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**Carlos Calleja Xifré**

DIRECTOR:

**Jesús Prados Arrate**

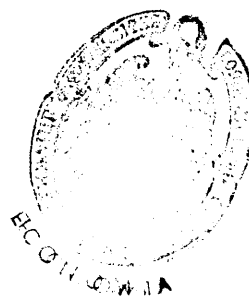
**Madrid, 2015**

Tesis doctoral

# LA TEORIA DE LA PRODUCCION Y LA DISCONTINUIDAD

por Carlos Calleja Xifré

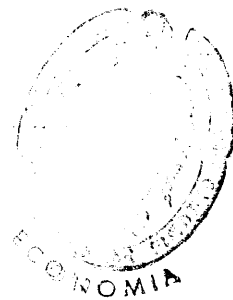
Dirigida por el profesor  
Dr. D. Jesús Prados Arrarte



FACULTAD DE DERECHO  
UNIVERSIDAD DE MADRID - 1971

BIBLIOTECA  
DE DERECHO

543



A mis compañeros del trabajo diario.

I N D I C E  
=====

Páginas:

INTRODUCCION. . . . .	Int: 1 - 18
Capítulo 1º- EN TORNO A LA EVOLUCION HISTORICA DE LA HIPOTESIS DE CONTINUIDAD, CON RE- FERENCIA ESPECIAL A SU APLICACION A LA TEORIA ECONOMICA. . . . .	I : 1 - 32
Capítulo 2º- MEDIDA, CONTINUIDAD Y CAMPOS NUMERICOS.	II: 1 - 24
Capítulo 3º- LOS SISTEMAS DE MEDIDA COMO FUNDAMEN- TO DE LA DISCONTINUIDAD EN ECONOMIA.	III: 1 - 26
Capítulo 4º- MAXIMOS BAJO HIPOTESIS DE DISCONTI- NUIDAD. APLICACION AL CALCULO DE LA TECNICA DE PRODUCCION OPTIMA. . . . .	IV: 1 - 30
Capítulo 5º- EL DINERO COMO INSTRUMENTO DE REGULA- CION EN LA TEORIA DE LA EMPRESA. . . . .	V : 1 - 44
Capítulo 6º- LA DISCONTINUIDAD EN LA DEFINICION DEL EQUILIBRIO GENERAL DE CAMBIO. CONCEPCION DINAMICA (MULTIPERODO) DE ESTE EQUILIBRIO CON REFERENCIA A LOS PROBLEMAS DE CLASIFICACION Y TRANSMI- SION DE INFORMACION. . . . .	VI: 1 - 23



Páginas :

APENDICE MATEMATICO. . . . . AM : 1 - 24

CONCLUSIONES . . . . . C : 1 - 6

BIBLIOGRAFIA . . . . . B : 1 - 29

oooooooo



Reconocimientos:

Al profesor Jesús Prados Arrarte, maestro y amigo, quien ha encauzado mi inquietud por caminos universitarios.

A los profesores Ivor Pearce y Herman Wold, cuyos estímulos para seguir este camino fueron decisivos.

A don Alonso Zamora, a Cosme Saló, a Joaquín Navarro, Javier Baltar y Elías Díaz, que me ayudaron en diversas singladuras de este trabajo bajo diversos aspectos.

A M<sup>a</sup> Paz Battaner y Rosalía Xifré, sin cuya ayuda no hubiera comenzado ni terminado.

Al Fondo para la Investigación Económica y Social de la Confederación Española de Cajas de Ahorro por la ayuda financiera concedida.

A todos, gracias.

# Introducción



I believe, however, that some (but not all) of our difficulties in mathematical economics (specially in utility theory and choice) are of our own making. Modern physics has shown that the number of ultimate particles (whatever these may be) is large but finite. Similarly, whereas subjective time may be continuous, any measured clock time is also discontinuous.

Kerneny, Snell and Thomson, citados por  
Gerhard Tintner

"Methodology of mathematical economics and  
econometrics".

## I N T R O D U C C I O N

=====

ooooo

Quizá un camino adecuado para presentar la tesis "La teoría de la producción y la discontinuidad", sea un comentario a las reflexiones que condujeron a su autor a elegir el tema. Estas mismas reflexiones pueden servir como justificación del interés que puede presentar este campo de investigación.

"El tema de "La teoría de la producción y la discontinuidad" se centra en el campo de la teoría económica y dentro de esta en la microeconomía. Hay que analizar, pues, la decisión en dos vertientes, pues significaba una predilección por el quehacer teórico frente a otras posibilidades: estructura, política o historia económica. La otra vertiente, ya situados dentro de la teoría, obliga a justificar la preferencia por una rama concreta: la microeconomía.

En el ámbito cultural español los economistas se formaban en las facultades de Derecho con un concepto de la ciencia eco-

nómica que puede calificarse de mixto. La formación económica era impartida a personas que debían hacer frente a responsabilidades concretas de índole social, administrativa, o de dirección en los grandes organismos, tanto públicos como privados, del país.

Un ejemplo preclaro de esta concepción de la preparación y función del economista fué dado por D. Antonio Flores de Lemus. En él teoría y práctica iban unidas en el desempeño de responsabilidad orientadora y reformadora de la administración española.

Este tipo de tradición permanece aún vigente y válida en nuestra Facultad de Derecho y al apartarse el autor de ella ha sentido, un tanto, la responsabilidad de exponer una justificación.

Esta justificación se encuentra en las repercusiones que han tenido en nuestro ámbito cultural el traslado de la enseñanza de la Economía a una Facultad especializada, con la consiguiente división y parcelación de las funciones, y la importancia de la asimilación de dos movimientos intelectuales que han influido en una depuración de los instrumentos teóricos de análisis.

Estas dos corrientes científicas que han influido ampliamente en el panorama de la ciencia económica española, pueden

describirse como la corriente "matemático marginalista", bajo la influencia de los profesores Von Stackenberg y José Castañeda, y la corriente "keynesiana", cuyo surco ha sido profundo y duradero, y en cuya introducción y difusión en España ha tenido una activa participación el catedrático director de esta tesis, doctor don Jesús Prados Arrarte, entre otros economistas.

Tanto la vigencia de una economía teórica más estructurada, como el mayor número de economistas surgidos de una facultad especializada ha hecho posible, y seguramente necesario, el hecho de la especialización. La división de Cecil Pigou entre "tool-makers" y "tool-users" entre aquellos que estaban interesados en el análisis económico, ampara la decisión del autor, (1) que se sitúa en el grupo de especialistas interesados por el tipo de instrumentos necesarios para lograr la comprensión de la realidad económica.

El desarrollo de la economía teórica en los últimos cincuenta años establece dos conjuntos de métodos para enfrentarse con la comprensión del fenómeno económico. Un grupo de estos métodos examina los sujetos económicos uno a uno para integrarlos luego en un sistema general de dependencia, en el cual es fundamental el intercambio de bienes y servicios. Este grupo de métodos de

(1) La referencia está tomada de ROBINSON, Joan "The economics of imperfect competition", Macmillan and Co, Ltd. Londres, 1965 (1ª edición 1933), pag.1, nota 1, en la que se cita a PIGOU: "The function of economics analysis", Sidney Balla Lecture, 1929.

análisis integrados en la tradición de León Walras, Alfred Marshall, Eugen von Böhm-Bawerk, y se les ha denominado "micro-económicos", por estudiar a cada uno de los sujetos que intervienen en la actividad económica separadamente y con detalle, aunque tan sólo en sus caracteres de conducta más comunes.

Otros métodos de análisis, desarrollados a partir de la obra de Wicksell, y ampliados después por la célebre obra de John Maynard Keynes, "La teoría general, de la ocupación, el interés y el dinero", pero con numerosos precedentes anteriores, se han denominado "macroeconómicos".

El fundamento de esta denominación se encuentra en que el estudio de la realidad económica se funda en la observación global y agregada de las magnitudes y de los partícipes de un sistema económico.

El tema que desea examinar el autor en este trabajo está centrado en la teoría de la producción, que se ocupa de los mejores métodos de convertir los factores de la producción en productos y del modo con que el sistema de precios sirve para regir esta actividad.

Cabe del mismo tanto una consideración "macroeconómica, como una consideración "microeconómica", pero solamente se estudiará ésta última. Si se examina la razón de esta nueva elección puede concluirse que la preferencia por el enfoque "microeconómico" proviene de la actividad profesional del autor, que se ha pres-



tado por entero en la empresa privada. Por esta razón la comprensión de la visión microscópica de los fenómenos económicos está mucho más vitalmente asociada a él.

Esta constituye la primera razón y seguramente la decisiva de esta decisión, cuya comprensión agradece profundamente el autor al ponente Dr. D. Jesús Prados.

Pero siendo esta una razón muy conveniente no es seguramente suficiente. La evolución de la macroeconomía ha sido en los últimos treinta años tan absorbente y brillante que ha marcado la pauta del esfuerzo investigador. Ha quedado con ello la microeconomía más en segundo plano; quedando su evolución, después de las aportaciones de los años treinta, más sosegada.

Sin embargo, en el ámbito cultural anglosajón se han producido en tiempos relativamente recientes nuevos brotes de interés por la investigación microeconómica. La revista francesa "Entreprise" (2) en una reciente evaluación de los caminos previsibles de la evolución de la investigación económica dice lo siguiente:

"La economía moderna pone su acento sobre la "micro-economía".

Los grandes ejes de la investigación económica fundamental no se encaminan tan sólo ya a los problemas de crecimiento o de conceptualización de magnitudes globales, sino también a cuestiones

(2) LEPAGE, Henri: "L'Economie en quête d'un nouveau génie", Entreprise mars, 1970. Reproducido en "Problèmes économiques, sélection de textes français et étrangers", Secrétariat Général du Gouvernement Direction de la Documentation, 10 decembre 1970. (Traducción del autor)

de elección de inversiones, de elección de técnicas, de estrategia de empresa y de crecimiento de empresa."

(...) "Este cambio de valores corresponde a un viraje en la concepción de la enseñanza de la economía, un viraje que data de hace diez años en los Estados Unidos, y que solamente se comienza a vislumbrar ahora en Francia, después de la creación en el Dauphiné, hace dos años, de una Universidad de gestión: no se trata ya de formar los economistas como si estuvieran destinados a ser "ministros de Finanzas", sino de orientarles favorablemente hacia los problemas de gestión, dominio que, desde el punto de vista profesional, constituye el campo esencial de las salidas profesionales de los jóvenes economistas; más vale preparar para un oficio que formar filósofos sin empleo."

Sin embargo, no sólo son razones de tipo pragmático, como las expuestas en el párrafo transcrito las que despiertan el interés por la "microeconomía". Esta no puede ser confundida con la teoría de la empresa en cuanto le separa de ella el interés por mostrar que la empresa forma parte y actúa dentro de un sistema. No puede, por ello, ser concebida la "microeconomía" como una mera técnica de gestión.

Precisamente en el modo como la empresa se halla ligada al sistema económico se encuentra un campo abierto a la investigación

Algunos de los presupuestos fundamentales sobre los que descansaba la relación de la empresa con el sistema han sido objeto de nuevo análisis. A la idea de que el sistema económico llegaría o tendía a llegar a una situación de equilibrio estacionario, se ha opuesto la evidencia y la teoría de los sistemas en crecimiento, a la idea de pleno empleo de los recursos económicos se ha contrapuesto la evidencia y la teoría de sistemas con subocupación. A la idea de un horizonte tecnológico estable, se responde con la evidencia y la teoría de una tecnología en continuo desarrollo.

Todos estos cambios en el horizonte de la teoría económica permiten y aconsejan examinar de nuevo algunos de los instrumentos intelectuales de análisis que han servido desde la última parte del siglo XIX, hasta la gran síntesis neoclásica para comprender el fenómeno microeconómico.

Pero seguramente una revisión importante de la microeconomía será necesaria como consecuencia de otra hipótesis que ha sido paulatinamente abandonada. Para los grandes constructores de sistemas microeconómicos de fines del siglo XIX y principios del XX el sistema económico se autoregulaba a través del mecanismo de los precios. Cada empresa y cada persona que concurría al mercado podía fijar, conociendo el sistema de precios, las cantidades más convenientes de compras y ventas de factores y productos, de tal modo que podía aspirarse, dada la distribución inicial de recursos, a que sin intervención de ninguna autoridad se alcanzara una situación óptima de todos los sujetos participantes en el mercado.

Con la revolución teórica del keynesianismo la idea de la regulación automática del sistema fué cediendo su lugar a otra. El sistema económico para que alcanzara una tasa de crecimiento aceptable con pleno empleo debía ser regulado. Los medios que podían utilizarse para ello iban a ser la política fiscal y la política monetaria. (Cap. 5º).

Este cambio de óptica puede ser analizado desde varios puntos de vista. En este trabajo se desea hacer hincapié en el cambio que se producía sobre la necesidad de información del sistema económico. Cuando el sistema funciona sin ningún tipo de regulación, la Autoridad Económica Central necesita una cantidad muy limitada de información sobre el estado del sistema. Esta información en todo caso no difiere de la que necesitan las propias empresas para elaborar sus decisiones. Consiste en el conocimiento de los precios de los factores de producción y de los productos, y de las cantidades producidas y vendidas de estos últimos.

Cuando una autoridad central necesita regular el sistema debe poseer una gran cantidad de información sobre su estado: situación de empleo o desempleo de los factores y de las empresas, acumulaciones de existencias (stocks) de productos, información sobre la situación monetaria y fiscal, conocimiento de importaciones y exportaciones de mercancías, servicios y capital, evolución de la renta nacional, del ahorro, de la inversión y del consumo, de precios y otras magnitudes.

La obtención de información sobre el estado del sistema se con-

vierte en un proceso sistemático, al mismo tiempo que el anuncio de las medidas de política económica se anuncian por parte de la Autoridad Central por medios de comunicación que alcanzan a la gran parte de los participantes en el sistema.

La cantidad, calidad y velocidad de transmisión de esta información es uno de los determinantes de la posibilidad de regular un sistema económico.

Esta proposición debe quedar claramente establecida para reflexionar acerca del significado que debemos atribuir al término información. Es importante señalar que ésta está constituida por un conjunto de números. Esto es cierto tanto de los conocimientos necesarios para regular la actuación de las empresas y los consumidores en el mercado, - precios y cantidades de bienes - como para los conocimientos que permiten regular la actividad de una empresa, o un sistema por parte de la Autoridad Central.

Podríamos afirmar, admitiendo un símil algo arriesgado, que la transmisión de conjunto de números desempeña en los sistemas económicos el mismo papel que la transmisión de la luz en los sistemas físicos. Ambas constituyen un vehículo de información.

Pero siguiendo con el símil puede encontrarse una diferencia notable. Mientras la luz es fundamentalmente gratuita, la información económica, tanto en su creación, elaboración, transporte y recepción tiene un ~~un~~ coste.

Una importante cantidad de contables, vendedores y estadísticos se dedican profesionalmente a recoger, suministrar y procesar información. Por ello puede considerarse un poco aventurada la hipótesis, a veces implícita, de la gratuidad y ubicuidad de la información económica.

Estas afirmaciones un tanto obvias nos pueden conducir a una pregunta interesante, conectada directamente con el tema central de esta tesis. Para conocer completamente el estado, y los estados posibles de un sistema económico, la cantidad de cifras que debemos conocer es finita o infinita.

Comenzaremos por responder preliminarmente a la segunda pregunta. Vamos a explorar (Cap. 6) la posibilidad de que el número de estados posibles de un sistema sea finito, a la vez que cada uno de estos estados sea también descrito con un número finito de cifras.

Este problema es un modo, quizá bastante sugestivo, de introducir el tema de la continuidad. Esta hipótesis que comenzó a ser discutida entre los griegos cuando se hacían los primeros esfuerzos para comprender los límites y posibilidades de la razón, ha sufrido de variadas alternativas (Cap. 1), aunque con pertinaz insistencia ha seguido apareciendo en la historia de los esfuerzos intelectuales durante XXV siglos, sin agotar completamente sus posibilidades.

En su penúltima evolución notable, debida al pensamiento y al esfuerzo del gran matemático Georg Cantor, quedó patente y claro que una magnitud, para ser continua, es decir mensurable por el campo de los números reales, debía poder adquirir infinitos estados.

El significado de esta afirmación será explorado con algún detenimiento (Cap. 2). Para evitar el encontrarnos con conjuntos infinitos, o potencialmente infinitos, podemos admitir que las magnitudes van a tomar los números que representen sus medidas no del conjunto de los números reales, sino de un conjunto, quizá extraordinariamente grande, pero finito, con primer y último elemento, de números racionales. Este es el sentido que damos en este ensayo a la palabra discontinuidad.

Puede mostrarse (Cap. 3) que este tipo de convención que permite definir la discontinuidad es introducido en el tráfico y cálculo económico al adoptar métodos (p. ej. el decimal) y sistemas de medida (p. ej. el C.G.S.), y que responde a la dificultad que existe de conseguir con los métodos e instrumentos de medida históricamente existentes <sup>de</sup> aproximaciones de medida más allá de ciertos límites establecidos.

La evolución hacia la discontinuidad tanto en el campo matemático, con la creación de una serie de técnicas discontinuas y finitas, como en el campo científico, corrobora las anteriores apreciaciones.

En el ámbito de la teoría económica en el cual estamos interesados especialmente, al ser los instrumentos de medida factores de la producción y la operación de medida un acto productivo, incluido en la función de producción, es necesario atribuir un coste real y monetario a los actos de medición.

Aplicando la estricta lógica económica no se estará en general interesado en alcanzar aproximaciones en las medidas cuyo coste monetario de obtención, mediante el uso de instrumentos y técnicas de obtención caras, supere al valor de mercado de la cantidad adicional obtenida con una mejor aproximación.

Sea por ejemplo, el examen de la ~~la~~conveniencia de aproximar las medidas de café dadas en gramos hasta los valores de 0,0001 milésima. El valor de la cantidad de café adicional que puede obtenerse con tal grado de aproximación puede resultar inferior al coste precisar la medida hasta tal grado de aproximación (si esto es posible). Por ello las partes pueden convenir en que basta una aproximación menor, por ejemplo hasta el gramo, en los instrumentos de medida que van a ser usados.

Este tipo de convenciones son muy corrientes en la industria y el intercambio económico. Por ello la medición discontinua es un hecho bastante generalizado, que ha sido adoptado por las prácticas contables.

Este es un beneficio nada desdeñable de un sistema de medidas



discontinuo ya que permite examinar si es posible verificar las proposiciones "microeconómicas" sobre una base contable. Mientras que el uso de la contabilidad ha sido ampliamente aceptado en "macroeconomía", en "micro", con tener una tradición contable mucho más antigua, existe aún una dificultad fundamental en observar la marcha de las empresas, desde el punto de vista del sistema, (que no desde su propio punto de vista), con base en su contabilidad.

Es perfectamente lícito explorar y así se hará en este trabajo, si la adopción por parte de la "microeconomía" de la hipótesis de continuidad y por la contabilidad de presupuestos de "discontinuidad" no representa un obstáculo para el planteamiento de una "microeconomía" con base contable.

Esta, con ser importante, no parece ser la única razón de diferencias. La contabilidad utiliza un tiempo periodificado y estructurado, al modo como ha sido utilizado por los modelos en ecuaciones de diferencias finitas, mientras que el análisis económico "micro" utiliza periodos de tiempo vagos y poco definidos, como el corto y el largo plazo, que más que destinados a un escrutinio continuado de la actividad económica, parecen destinados a fijar los momentos en que el sistema alcanzará un estado más o menos estacionario, que ya ha sido rechazado como principal instrumento de análisis para contemplar la evolución de un sistema económico con tendencia al crecimiento.

No van a ser examinadas en esta ensayo los problemas creados por las diferencias de definición, especialmente en la teoría de los costes, pero si se puede mencionar la diferencia de objetivo de la contabilidad en cuanto es parte de un sistema, la empresa, que tiene como objetivo conseguir el beneficio máximo y cuyo proceso interno de organización contable está establecido para ayudar a tomar decisiones que cumplan el objetivo.

Desde el punto de vista de una Autoridad Económica central, cuyo objetivo sea el máximo crecimiento con pleno empleo, por ejemplo, el tipo de información que debe obtener<sup>de</sup> y transmitir a la empresa no coincide con la que ésta necesita para conseguir su objetivo particular, el beneficio máximo, por ello quizá podría sugerirse que resultaría conveniente estudiar la posibilidad de introducir en la técnica contable las previsiones necesarias para que, si la empresa lo crea conveniente, pueda proporcionar la información necesaria para la regulación del sistema.

Se espera mostrar en esta introducción que existe un campo de investigación, cuyo eje puede pasar por el estudio de la discontinuidad, que dadas las particulares condiciones del autor, justifica suficientemente el dedicar su tesis doctoral a aclarar en la medida de lo posible los planteamientos ya especificados.

Pero a esto debe añadirse una nueva consideración de técnica matemática, cuyo desarrollo va a ser también incluido. (Cap. 4)

Una de las propiedades de los conjuntos finitos y discontinuos, tal como han sido definidos previamente en esta introducción consiste en, si son ordenables totalmente mediante un orden serial, poseer por lo menos un máximo. (3)

Esta propiedad fundamental permite un método, fundado en la discontinuidad, de alcanzar las posiciones máximas, que difiere en algunos aspectos, de los utilizados comunmente en economía matemática, generalmente basados en el método de los multiplicadores de Lagrange.

Se desea mostrar que cuando un conjunto es finito, si es totalmente ordenable, este orden puede ser construido paso a paso, o sea examinando uno a uno cada uno de los componentes del conjunto hasta haberlos emplazado todos en su lugar correspondiente. Con ello aparecerá por lo menos un máximo sin necesidad de haber estimado previamente una función analítica continua.

Creo que es lícito preguntarse cual debe ser el camino que debe tomar una empresa al no saber o no poder calcular funciones analíticas de producción. No se pretende que el camino que se va a mostrar en esta tesis sea el único posible, ni tan siquiera el único válido. Pero si se desea mostrar que es un camino posible para estos casos de imposibilidad o desconocimiento de las funciones de producción analíticas microeconómicas.

(3) Ver RIOS, Sixto "Algebra lineal" Madrid 1966, página 19, apartado 7 del capítulo 3.

Puede también mostrarse y así se procurará hacerlo en el apartado correspondiente que este método de hallar máximos, basado en la discontinuidad, puede desarrollarse sobre bases de contabilidad industrial.

Con ello y con el desarrollo del sistema económico como un sistema finito (Cap. 6) puede atribuirse a la matemática otra función además de la que P.A. Samuelson ha postulado como fundamental. En la portada de su libro "Foundations of economic analysis" se reproduce el siguiente aforismo de su maestro J. Willard Gibbs: "Mathematics is a language". (4)

Es cierto que la matemática es un lenguaje que facilita enormemente el razonamiento numérico. Pero como tal lenguaje la matemática puede ser una gramática que trata del manejo de símbolos (x, y, z, puntos, líneas, planos, por ejemplo) de su propia creación, mediante un conjunto de axiomas. Nos encontramos ante la matemática teórica.

Pero la matemática es o puede ser, además, un modo de aprehender la realidad a través del número. Cuando un campesino cuenta un rebaño pasa de un conocimiento general expresado en la frase: "el rebaño contiene muchas ovejas" a un conocimiento operativo y concreto expresado en "el rebaño contiene veintiuna ovejas". Con el número determina, concreta y especifica la realidad. El número es un adjetivo numeral cardinal y ordinal. Este es el dominio de la matemática aplicada.

(4) SAMUELSON, Paul Anthony, "Foundations of economic analysis" Atheneum, New York, 1965, (1ª edición 1947)

La economía matemática, que ha hecho progresar durante cien años, el conocimiento económico, se ha encontrado al querer especificar numericamente los símbolos algebraicos en que estaba expresada en una alternativa. O tenía que reducir mediante la agregación de cantidades los millones de variables de que consta un sistema microeconómico a unas pocas y concebir macroeconómicamente los sistemas, con lo cual podía atribuir a las variables y parámetros valores numéricos, o debía renunciar, (precisamente por tener que tratar millones de variables), a especificarlas con sus valores numéricos y razonar en términos algebraicos generalizados donde las cantidades ( $p$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $q$ , etc) se suponían, sin serlo en realidad, medidas.

La matemática del siglo XX ha aportado numerosas sugerencias para hacer frente al tratamiento de los sistemas "muy grandes" en los cuales coexisten millones de variables. En la medida del conocimiento del autor es una matemática que aún está en proceso de desarrollo y de la cual cabe esperar resultados interesantes y sugerentes para el tratamiento de sistemas microeconómicos.

Este trabajo contiene ya un esfuerzo preliminar para definir algunos de estos problemas típicos de los sistemas muy grandes, pero es muy difícil poder afirmar que se encuentran en estado satisfactorio. Solo pueden considerarse como un esfuerzo preliminar para centrar el problema.

Las personas que hemos colaborado ~~y~~ seguido los esfuerzos in-

telectuales del ponente de esta tesis, el profesor Jesus Prados, hemos podido atestiguar una preocupación apasionada por los problemas de la renovación del marginalismo como teoría que explica la conducta típica de la empresa. (5)

Al redactar esta tesis se ha reflejado sin lugar a dudas el trabajo realizado en el seminario del Dr. Prados, junto con otros notables y jóvenes economistas colaboradores de su Cátedra. Al comentar los puntos de vista de la empresa y del empresario español en la medida que los he oído expuestos en el curso de mi labor profesional, y compararlos con el esquema analítico que es utilizado por los economistas profesionales al servicio de la administración pública, he podido constatar que existe una divergencia en puntos de vista fundamentales, resultado de la utilización de instrumentos de análisis distintos y de esquemas de teoría económica diferentes.

No existen por mi parte dudas de que la labor más fecunda del magisterio universitario es la de despertar a la visión de problemas y de enseñar a juzgar la realidad. En este aspecto este trabajo es una respuesta a los mismos problemas que se plantea Don Jesús Prados. Por esto la colaboración ha podido ser estrecha en el transcurso de la redacción de este trabajo. No obsta a ello que la respuesta haya sido distinta. El objeto de esta tesis es, fundamentalmente, dialogar para aportar en la medida de lo posible una visión del sistema económico desde el punto de vista de la empresa privada, de tal forma que sería deseo del autor aproximar la "microeconomía" en la medida de lo posible a la realidad de su trabajo de todos los días.

(5) Ver PRADOS ARRANTE, Jesús. "Principios de una teoría económica dinámica." Ariel, 1970.

Capítulo 1.º—**En torno a la evolución  
histórica de la hipótesis  
de continuidad, con refe-  
rencia especial a su aplica-  
ción a la teoría económica.**

"Un problema de importancia secundaria surge efectivamente en el caso de las discontinuidades. Pero en tanto estemos interesados con una primera formulación de los principios fundamentales, estamos en nuestro derecho de no preocuparnos acerca de ellas y entonces todos los reparos sobre el resultado son debidos al fracaso en entender la lógica de los infinitesimales, de lo cual pueden citarse ejemplos incluso en los años veinte!"

**J. A. Schumpeter:**

**"History of Economic Analysis"**



C A P I T U L O            1º  
=====

EN TORNO A LA EVOLUCION HISTORICA DE LA HIPOTESIS DE  
CONTINUIDAD, CON REFERENCIA ESPECIAL A SU APLICACION  
A LA TEORIA ECONOMICA.

ooooo

1-a) El origen del problema de la continuidad. Cuando la teoría económica adoptó durante el siglo XIX los métodos del cálculo diferencial e integral y con él la hipótesis de continuidad, esta rama de la matemática había alcanzado uno de sus momentos de mayor apogeo, caracterizado, como se comentará más adelante, por la precisión de su exposición y por la facilidad de su aplicación operatoria.

Esta situación brillante de esta rama de la matemática que recibieron Cournot, Jevons, Marshall, Augusto y León Walras, ~~Vi~~fredo Pareto y otros economistas de menor importancia de fines del siglo XIX y comienzos del XX, presentaba a los efectos de nuestro análisis dos características destacadas.

Una de ellas consistía en el dilatado periodo de gestación y discusión del tema que se había prolongado desde los primeros filósofos y matemáticos griegos del siglo V antes de Jesucristo hasta fines del siglo XIX y comienzos del XX. La segunda característica que se desea destacar consiste en que el cálculo diferencial, a pesar de su brillantez operatoria, no había resuelto, cuando en el periodo de 1860 a 1880 es incorporado a la teoría económica, las paradojas y contradicciones lógicas que se encontraban en sus fundamentos.

A nivel matemático muy especializado los problemas de la fundamentación del cálculo diferencial fueron resueltos en la última parte del siglo XIX y comienzos del XX por una serie de notables matemáticos entre los que sobresale Georg Cantor, siendo fundamentales las aportaciones de Weierstrass, Dedekind y de Whitehead y Russell. (6) El uso del resultado de estas investigaciones comenzó a ser corriente en el segundo cuarto del siglo XX. En este momento el cálculo diferencial había sido incorporado, sin demasiado examen crítico sobre su aplicabilidad, a las herramientas intelectuales del análisis económico.

Considerar de nuevo las paradojas y contradicciones que fueron comunes a su origen y desarrollo puede aportar ventajas a la comprensión del significado de la hipótesis de continuidad en economía y también puede ayudar a explicar la hipótesis de discontinuidad y las razones que la avalan.

(6) BOYER, Carl: "The history of the calculus and its conceptual development" Dover Publications, Inc. New York 1949, Capítulo VII, "The rigorous formulation". El libro contiene una bibliografía de 516 títulos donde se puede hallar las aportaciones de los autores citados.

Un resumen de ésta situación se encuentra en el siguiente párrafo escrito por Bertrand Russell: (7)

"Ya desde los tiempos de Zenón el Eléático, los filósofos de linaje idealista trataron por todos los medios de desacreditar a los matemáticos, maquinando al efecto contradicciones para demostrar que los matemáticos no habían llegado a alcanzar la verdad metafísica real, que sólo era accesible a los filósofos. Muchos de estos prejuicios se encuentran en Kant y aun más en Hegel. Durante el siglo XIX los matemáticos destruyeron esta parte de la filosofía kantiana. Lobatchewski, al idear la geometría no euclidiana, socavó el argumento matemático de Kant acerca de la estética trascendental. Weierstrass probó que la continuidad no envuelve los infinitesimales; Jorge Cantor inventó una teoría de la continuidad y del infinito que echó por tierra muchas de las paradojas antiguas que los filósofos habían inventado. Frege mostró que la aritmética se deriva de la lógica, en oposición al criterio de Kant. A todos estos resultados se llegó por los métodos matemáticos ordinarios y fueron tan indudables como la tabla de multiplicar".

b) Continuidad y discontinuidad. Algunas de las contradicciones que habían mostrado los matemáticos y filósofos griegos siguen estando latentes en las discusiones mantenidas por los economistas en

(7) citado por DAMPIER DAMPIER-WHETHAM, Guillermo C. "Historia de la ciencia". Madrid, sin fecha, 1ª edición, página 445.

torno a la continuidad. Por esta causa resulta interesante comentar varias de estas paradojas. (8)

La matematica griega había encontrado dos tipos de objetos matemáticos los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6,....etc que proporcionaban una idea de unidades discontinuas y los objetos geométricos: el punto, la línea, el plano y los cuerpos en el espacio que parecían formados de un modo continuo. De este modo las primeras intuiciones matemáticas conducían ya a una dicotomía continuidad-discontinuidad.

Las figuras geométricas llevaron a considerar el problema de la suma de infinita suma de infinitésimos. Al intentar calcular áreas y volúmenes de cuerpos irregulares los griegos observaron que podían dividirlos en partes muy pequeñas y regulares (p. ej cuadrados) y calcular el area de cada una de estas figuras, procediendo después a sumarmas. Si las figuras eran suficientemente pequeñas para poder cubrir practicamente toda la superficie o volumen se obtenía el área o volumen del cuerpo irregular. Para ello había que suponer las divisiones cada vez más pequeñas, a poder ser un infinito número de ellas.

La suma de un infinito número de partes muy pequeñas (infinitésimo) daba paradójicamente un resultado finito. El principio de este método es el utilizado en el cálculo de integrales.

(8) Véase BOYER, Carl B. libro citado en nota 6, capítulo II y SMITH, David E. "History of Mathematics" volumen 1º páginas 62-94 y volumen II, capítulo X de la edición de Dover Publications, Inc. New York, 1958.

También el cálculo comparativo de áreas había llevado al descubrimiento de los números irracionales. Al intentar medir, por ejemplo, la longitud de la diagonal de un cuadrado tomando como unidad de medida el lado se obtenía como resultado  $\sqrt{2}$ , cantidad que, según puede demostrarse, produce, al intentar una solución aproximada, infinitas cifras decimales, ya que no es igual al cuadrado de ningún entero ni <sup>de</sup> ningún número fraccionario.

Los números irracionales que podían ser calculado con un número creciente e ilimitado de cifras decimales creaban un proceso en cierto modo continuo y rompían la perfección de la aritmética; la naturaleza de estos números quedaba pendiente de una explicación satisfactoria.

Estas eran algunas de las paradojas creadas en el campo matemático. Entre los filósofos la continuidad era discutida con otro fundamento.

En la concepción física del mundo pug~~n~~<sup>an</sup>aban dos intuiciones poderosas. Por una parte la atomística que defendía el punto de vista de que el mundo estaba formado por partes que eran, a partir de cierto momento indivisibles, y por otra existía otra concepción, principalmente del tiempo y del espacio, que sostenía que la divisibilidad no debía tener límites.

La física ha seguido insistiendo en la posibilidad y conse-

cuencias de la posibilidad de dividir continuamente la materia. Esta es una cuestión que puede ser sometida a prueba y que, según ha podido comprender en cierta medida el autor de este trabajo, ha dado un resultado negativo. En la medida de <sup>la</sup> muy limitada comprensión de este problema que se puede aportar, algunos de los reparos a la continuidad y a la matemática continuista puestos por la física del siglo XX, se derivan de una concepción discontinuista de la materia. Sobre este tema se insistirá más adelante.

Los autores que como P.A. Samuelson reconocen explícitamente que "todos los bienes son últimamente indivisibles más allá de ciertas cantidades" (9) toman posición en este problema, aunque después empleen una matematización fundada en la continuidad.

Mientras la división de la materia podría conducir intuitivamente a la discontinuidad, el movimiento en el espacio y en el tiempo conduce a la intuición de continuidad.

Un cuerpo que se mueve ¿se encuentra en un momento del tiempo en algún sitio?. Para responder a esta pregunta es necesario descomponer o dividir el espacio y el tiempo en partes cada vez más pequeñas. No parece obstáculo alguno a la intuición para admitir que esto es posible. Sin embargo la admisión de la división continua del espacio y del tiempo conduce a notables paradojas.

(9) SAMUELSON, Paul A. en "Problems of integrability in utility theory", *Economica*, noviembre 1950 página 374, línea 1<sup>a</sup>. En este artículo se discute ampliamente este problema desde el punto de vista de justificar la continuidad. El texto en inglés es como sigue: "all goods are ultimately not divisible beyond certain quantities".

Una de las más antiguas y conocidas es la de Aquiles, el de los pies ligeros. Si Aquiles persigue una tortuga y cada vez que ha recorrido la mitad del espacio que le separa de ella, ésta ha avanzado, nunca llegará a alcanzarla, en tanto descompongamos el proceso en periodos de espacio y tiempo cada vez más pequeños, de modo indefinido e ilimitado.

El problema de la continuidad versus discontinuidad necesitaba, a partir de los griegos, de una formulación más rigurosa y comprensiva, que, entre otros, debía afrontar los siguientes problemas:

a) Como se relaciona el espacio y el tiempo, que pueden ser concebidos como perfectamente divisibles, infinitos, y ordenados linealmente con el conjunto de los números que los describen, que, en principio (1, 2, 3, 4, 5, ....etc) parecen discontinuos.

b) Como pueden incluirse los números irracionales en este esquema.

c) Como este esquema puede ayudar a comprender la naturaleza lógica del movimiento en el espacio y el tiempo.

Las respuestas a estas preguntas, que constituyen fundamentalmente la teoría del continuo matemático, se darán, en la medida de nuestros conocimientos, en el Cap. 2º. Sin embargo quedaban por responder algunas otras cuestiones no propiamente matemáticas de la teoría de la continuidad.

Estas cuestiones son:

d) ¿Cómo se incluyen en la teoría matemática los bienes que pueden considerarse indivisibles a partir de un cierto límite.?

e) ¿Pueden los instrumentos de medida decidir si el espacio y el tiempo son continuos o discontinuos?

f) ¿Es posible una matemática no continua, y si lo es, cómo es posible?. ¿Cuál es su relación con los problemas d) y e) y con la matemática continua?.

La ciencia económica puede estar interesada en conocer, si existe, la respuesta a estas preguntas pues en este caso sería posible intentar utilizar una matemática no continua - o discontinua - en el tratamiento de las magnitudes económicas. Como en parte esta evolución es patente y ya la discontinuidad es común en economía, quizá este trabajo pueda ser útil en cuanto reseñará algo de lo hecho en este sentido, algo de lo que queda por hacer y modestamente aportará algunas sugerencias para algunos problemas concretos, especialmente el modo de considerar la solución de los problemas de máximos, tan importantes en economía, bajo la hipótesis de discontinuidad.

c) El triunfo del cálculo diferencial. Los puntos de vista opuestos sobre este tema se mantuvieron vigentes. Parece que San Isidoro de Sevilla defendía el punto de vista de que una hora se componía de 22.560 instantes (10). Pero el cúmulo de aportaciones que se sucedieron continuamente, aun durante los momentos de más penuria cul-

(10) Ver BOYER, Carl B. libro citado en nota 6, página 66. El libro está dedicado a una exposición de los esfuerzos intelectuales alrededor de este tema, durante todas las épocas.



tural como pudo ser la Edad Media, no fructificaron en instrumentos matemáticos de utilidad y espectacularidad hasta la creación del cálculo diferencia e integral que comenzó en su versión moderna con las aportaciones de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm von Leibniz. (11)

El cálculo diferencial e integral creaba un método para resolver el cálculo de áreas mediante la suma de infinitos sumandos muy pequeños, que resulta ser finita, problema ya conocido desde la antigüedad. A este proceso se le ha denominado integración. Pero por otra parte resolvía un problema interesante para la física. La velocidad es la relación entre el espacio y el tiempo ( $\Delta e / \Delta t$ ); cuando los periodos de espacio y de tiempo que se consideran son cada vez más pequeños, según la propiedad intuitiva de división continua del espacio y del tiempo, se produce un cociente de cantidades muy pequeñas en forma de serie. El cálculo de derivadas permitía calcular su valor sustituyendo el valor de la serie por el del ~~se~~ límite al que tiende.

Cabe señalar la eficacia operatoria de ambos métodos, que en principio se conciben para ser aplicados al espacio y al tiempo, magnitudes que no presentan problemas de discontinuidad. No es aventurado afirmar que la eficacia operatoria del cálculo diferencial e integral se acrecienta, una vez superadas en el siglo XIX las divergencias entre las concepciones de sus fundadores. Pero, para el éxito del cálculo como instrumento operatorio, no fué necesario aclarar los problemas de fundamento.

- (11) Sobre los métodos diversos de fundar el cálculo diferencial derivados de las posiciones de sus grandes impulsores puede verse el capítulo II del libro de MATAIX ARACIL, Carlos "Análisis algebrico e infinitesimal" Tomo primero: cálculo diferencial. Quinta edición. Editorial Dossat, S.A. 1957 y el capítulo X del libro citado en la nota 8 de David E. SMITH, volumen II.

El desarrollo del cálculo se realiza con la aportación de notables matemáticos como Taylor, Mac Laurin, Cauchy, Lagrange, Laplace y otros. Este desarrollo situa en el centro del cálculo diferencial e integral la idea de función continua, que después se introducirá en la teoría económica.

Agustin Cournot, considerado como uno de los primeros y más importantes economistas matemáticos, según su nota biográfica:(12)

"Fué discípulo de Lacroix, de Hachette y después de Laplace, Lagrange y Poisson, obtiene la Licenciatura en Derecho en 1827, y se doctora en Ciencias Matemáticas, con una tesis sobre mecánica analítica, dos años más tarde"

En este mismo ambiente intelectual en el cual el cálculo diferencial e integral ha llegado a ser la "matemática moderna" del siglo XIX, se forman León Walras y los economistas ingleses William Stanley Jevons y Alfred Marshall. El cálculo diferencial e integral forma parte del interés científico de toda persona culta.

Su introducción en la teoría económica se realiza a través de la teoría del valor fundado en la utilidad marginal (13), que sugiere de un modo claro el concepto de derivada.

Sin embargo el tipo de magnitudes a las cuales va a ser apli-

(12) COURNOT, Antoine-Agustin: "Investigación acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas" Alianza Editorial Madrid 1969 (1ª edición 1838) Nota introductoria editorial.

(13) KAUDER, Emil "A history of marginal Utility theory" Princeton University Press, 1965, Capítulo III

cado el cálculo diferencial en economía son más bien del tipo de las que presentan una posibilidad clara de un límite irreductible de división. Por esta causa, ya desde el comienzo de la aplicación del cálculo, se manifiestan reservas mentales acerca de su aplicabilidad. La escuela de Viena: Menger, Wieser, Böhm- Bawerk, exponen la teoría marginalista sin el uso del cálculo diferencial, mediante ejemplos numéricos, generalmente(14).

Centrados en el tema que va a ser objeto de este ensayo, la existencia de "discontinuidades" en la teoría de la producción (por ej., costes fijos a corto plazo) es patente desde el comienzo de su elaboración.

La plena difusión del cálculo diferencial como un lenguaje propio de la teoría económica en general y de la teoría de la producción en particular sólo se alcanza a partir de la década de los años cuarenta del siglo XX. Hasta entonces la argumentación matemática se reservaba para los apéndice<sup>2</sup>s de los trabajos o iba simultaneada por argumentaciones y exposiciones literarias. Esta difusión fue consecuencia del intenso trabajo realizado en seminarios universitarios y de los muchos artículos aparecidos en las revistas científicas especializadas por los años treinta, y tuvo dos exponentes destacados: "Value and Capital" de J.R. Hicks y "Foundations of Economic Analysis" de P.A. Samuelson, que, aunque publicado unos años más tarde, tuvo su gestación hacia los años treinta.

(14) Ver libro citado en nota 13.

d) La función continua microeconómica de producción. El concepto central del cálculo diferencial, o sea la función continua, fué adoptado plenamente por la ciencia económica matemática. Funciones de utilidad, de demanda, de producción, de bienestar, entre otras entraron a formar parte del instrumental intelectual de análisis económico.

La función se concebía como una relación existente entre unos valores numéricos tomados por una magnitud y otros valores correspondientes a los primeros que tomaba otra magnitud. Si mediante cálculo se podían determinar los valores de la segunda magnitud conocidos los de la primera, la función es apalítica; si no se conoce un método de cálculo para pasar de uno a otro conjunto de valores la función es empírica

Es necesario señalar que la existencia de funciones empíricas, o correlaciones entre conjuntos de cantidades, no implica necesariamente la existencia de funciones analíticas. Para que esta exista debe conocerse algún tipo concreto de función (p. ej. la lineal  $y = ax + b$  u otra) que cumpla para unos parámetros conocidos ( $a$ ,  $b$  en la función lineal) de un modo suficientemente aproximados la función analítica supuesta.

Es corriente en teoría económica siempre que aparecen grupos de valores entre los que se sospecha alguna dependencia suponer que existe entre ellos una dependencia que puede ser representada por una función analítica.

La posibilidad de hallar siempre funciones analíticas puede también ser objeto de cierta reserva. A veces los productos pueden ser más de cinco mil y los factores de la producción más de un millón y en estos casos, aun suponiendo válida la hipótesis de que la función analítica existe, puede resultar difícil de estimar.

Con esta salvedad inicial seguiremos admitiendo la posibilidad de encontrar en todos los casos funciones de producción analíticas, que en este apartado serán también continuas con derivadas continuas de primer y segundo orden.

La función de producción, pues, relacionará la cantidad obtenida de un producto ( $y$ ) con las cantidades de factores necesarios para su obtención:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  (15)

Concebida como una función continua la función de producción será de tal tipo que le permita gozar de propiedades adicionales. El número de procesos distintos de producción es infinito, aunque el campo de variación de los valores de las  $x$  se supone limitado dentro de unas fronteras que permitan la sustitución eficaz de recursos (factores de la producción) entre sí.

Otra propiedad importante es la llamada ley de los rendimientos marginales decrecientes, o ley de la productividad marginal decreciente. Si se mantienen fijas todas las cantidades de factores menos la de uno

(15) La concepción formal de la función de producción aunque está implícita en los autores marginalistas, como Marshall y explícita con características especiales en Walras, Pareto y Wicks-teed, es desarrollada formalmente en el siglo XX. Ver CARLSON, Sune "A study on the pure theory of production", Londres, King 1939 y FRISCH, Ragnar "Las leyes técnicas y económicas de la producción" Sagitario, Barcelona, 1963.

cuya cantidad varía en cantidades iguales (márgenes), a partir de un valor determinado del factor variable ocurrirá que su mayor utilización aunque consiga aumentar la cantidad total producida del producto, los aumentos serán cada vez más pequeños hasta anularse, en el valor máximo del producto.

Esta ley fué observada y utilizada en primer lugar para la agricultura por los economistas clásicos: Turgot, Von Thünen y David Ricardo. (16) Posteriormente fué extendida a todos los sectores de producción. El fundamento de la ley debe entenderse por que es empírico, pudiendo ser rechazada por los hechos.

Matemáticamente la ley se incorpora a la función de producción continua postulando que su derivada primera será positiva, siendo negativa, en parte del recorrido, su derivada segunda. Cuando los factores y productos son varios las derivadas son parciales.

Otra propiedad que puede incorporarse al tratamiento matemático de la función de producción continua es la ley de rendimientos proporcionales constantes. Esta ley significa que, si se multiplica la cantidad de cada uno de los factores por una cantidad (p. ejemplo se duplica) la cantidad total de producto tam-

(16) Ver SCHUMPETER, Joseph A. "History of Economic Analysis" George Allen and Unwin, Londres, quinta impresión 1963 (1ª edición 1954) páginas 1026 a 1053.

bién se multiplica por dicha cantidad (en el ejemplo se duplica).

Matemáticamente esta propiedad puede enunciarse postulando que la función de producción será homogénea de primer grado, con lo cual cumplirá el teorema de Euler (o de Wicksell-Johnson) importante en la teoría de la distribución de la renta, aunque no necesario.

Esta propiedad es de difícil reconciliación con la información disponible sobre el comportamiento de la producción, A corto plazo es incompatible con la "indivisibilidad" de algunos factores de la producción y a largo plazo implica una condición implícita en todo el análisis de la función de producción, que la convierten en poco probable en nuestras actuales condiciones institucionales, dado que supone la técnica de producción constante.

Desde el punto de vista económico esta ley significa que, sea cualquiera el tamaño de la planta, los costes medios mínimos serán los mismos, todas las plantas tienen igual eficiencia. (17)

La función de producción continua presenta también la propiedad de perfecta sustituibilidad de los factores entre sí. Esta propiedad permite definir un interesante instrumento de análisis, la relación marginal de sustitución y la elasticidad de sustitución. (18)

(17) Para un amplio estudio de las propiedades de la función de producción reseñadas ver STIGLER, George J. "La teoría de los precios." Editorial Revista de Derecho Privado, Madrid 1962, Capítulo 8º.

(18) Ver ALLEN, R.G.D. "Análisis Matemático para economistas" Aguilar, Madrid, 1959, páginas 335-39, 365-67.

Una consecuencia conjunta del carácter decreciente de la relación marginal de sustitución, proposición positiva y verificable, junto con las restricciones impuestas o bien a la cantidad de producto que se desea producir, o bien a la cantidad de dinero de que se dispone para dedicar a la producción, es la ley de la igualdad de la relación entre las productividades marginales y los precios de los factores, que se consigue aplicando a la función de producción, condicionada a las relaciones expuestas, el método de los multiplicadores de Lagrange. (19)

En esta posición la empresa consigue la combinación de factores más eficiente para producir una cantidad determinada de producto o la producción máxima con una cantidad fija de dinero.

El método de alcanzar la posición óptima bajo las mismas condiciones, que se expone en el capítulo 4, basado en la hipótesis de discontinuidad no garantiza alcanzar esta posición de equilibrio, que es una propiedad de la productividad marginal decreciente de la función de producción (20) junto con la hipótesis de continuidad. Alternativamente, es posible definir el equilibrio de otro modo, que permite un juicio operativo sobre si se ha alcanzado realmente o no.

La función de producción continua ha sido objeto, en el planteamiento antes expuesto de algunas críticas consistentes. Una de

(19) La exposición de los fundamentos y operatividad del método de los multiplicadores de Lagrange se halla en LOBEZ URQUIA, José "Análisis matemático", segundo curso. Barcelona, 1964.

(20) Ver CASTAÑEDA, José "Lecciones de Teoría Económica", 4ª edición Madrid 1965, lecciones 21, 22 y 23.



las más fundadas es la omisión del aspecto temporal de la función. Esta está definida para un periodo de tiempo determinado, y el cambio de este periodo no tiene relevancia en tanto que el ritmo de entrada y salida de factores sea constante. En este caso la función de producción es homogénea de grado uno con relación al tiempo.

Cambia de consideración y de importancia el aspecto temporal cuando el ritmo de producción es variable y, aspecto más importante, cuando existan, si es posible determinarlos, periodos medios de producción diferentes. Este aspecto de la teoría de la producción es especialmente interesante en la teoría del capital.

Otra crítica importante ya mencionada versa sobre la constancia de la técnica de producción. En las actuales condiciones institucionales e históricas, a largo plazo la función de producción se deberá replantear de nuevo, con lo cual el análisis fundado en su constancia deja de tener validez.

Este problema ha sido especialmente considerado en las funciones macroeconómicas, que no caen dentro del campo de estudio de este ensayo, pero que reflejan un problema compartido por la microeconomía. (21)

- (21) Los aspectos macroeconómicos del cambio de técnica en la función de producción se exponen en SEGURA, Julio "Función de producción, macrodistribución y desarrollo." Editorial Tecnos Madrid, 1969, Capítulo VI. La definición de técnica constante y técnica variable a nivel microeconómico es desarrollada por FRISCH, Ragnar, libro citado en nota 15, capítulo 3.

e) Algunos aspectos de la "indivisibilidad" y de la "discontinuidad" en la teoría neoclásica de la producción y los precios.

Ya León Walras había planteado la teoría de la producción bajo los supuestos de que los factores de la producción no podían combinarse más que en proporciones fijas. Enrico Barone le hizo cambiar de opinión y pasó a considerar que las funciones de producción podían estar definidas por coeficientes de producción, que indicaban la cantidad de cada uno de los factores necesaria para la producción de una unidad de producto,<sup>y</sup> que estos coeficientes de producción serían elegidos según el precio de los factores.

La función de producción con coeficientes fijos ha quedado definitivamente incorporada a la teoría de la producción. (22)

Relajando la necesidad de proporciones fijas, se puede considerar que existen factores limitativos, cuya presencia en cantidades fijas es necesaria para el buen desarrollo de la producción, pudiendo los otros factores variar libremente una vez adaptados a los factores limitativos.

El desarrollo de la teoría de la producción con coeficientes fijos ilustra de las dificultades que una teoría basada en la discontinuidad tiene para atribuir las propiedades reseñadas en el apartado anterior a una función continua. En el caso de la disminución de

(22) Véase FERGUSON, C.E. "The neoclassical theory of production & distribution" Cambridge University Press, 1969, capítulos 2 y 3.

rendimientos manteniendo todos los factores fijos, menos uno cuya cantidad aumenta, pero ya no en cantidades muy pequeñas, sino en cantidades razonablemente grandes, la cantidad de producto puede no aumentar, debido a las proporciones fijas, pero si las cantidades de otros factores están en exceso, al aumentar, lo puede hacer con una productividad marginal discreta constante, pero también decreciente.

El significado de la ley en cuanto puede ser verificado no cambia fundamentalmente, sólo se ve privado de sus propiedades de continuidad.

La ley de rendimientos proporcionales constantes, o ley de la homogeneidad de grado uno de la función de producción, es la más discutida cuando se incluyen "indivisibilidades". Si una vía de tren entre dos ciudades tiene capacidad para que circulen 200 trenes al día, al duplicarse será muy difícil, tanto a corto como a largo plazo, crear una vía de tren nueva con capacidad para 5 trenes. La nueva vía tendrá capacidad también para 200 y, de circular 5, estará subutilizada. (23)

Alrededor de este tipo de "indivisibilidades" y de su responsabilidad en la aparición de rendimientos crecientes y decrecientes a escala, los puntos de vista son varios y no puede decirse que la cuestión esté zanjada. Nuevas aportaciones pueden

(23) Ver STIGLER, George J. libro citado en nota 17, capítulo 8

aún modificar los puntos de vista de esta cuestión no decidida. (24)

En la teoría del coste la discontinuidad tiene también una importancia digna de ser comentada. La idea de coste fijo, en cualquiera de las definiciones que pueden darse de esta magnitud, significa que la empresa debe pagar unos factores con independencia del producto que consiga, idea que se acerca bastante a una situación discontinua.

En propiedad la curva de oferta de la industria debe considerarse también creciendo "a saltos" cada vez que se incorpora a la oferta una nueva empresa, que aporta su mínimo de producción. (25)

Como conclusión es lícito afirmar que en la teoría de la producción y de la empresa la "discontinuidad" y la "indivisibilidad" son dos fenómenos importantes, y que tanto es posible concebir la teoría de la producción bajo la hipótesis de continuidad, como aceptar la existencia de discontinuidades.

f) La discontinuidad en la dinámica económica. En la economía estática todas las variables están referidas a un mismo momento del tiempo. Una vez observadas las variables puede examinarse cual será su valor en unos momentos del tiempo, siempre los mismos para todas, futuro que pueden ser según el análisis de Marshall, el corto y el largo plazo.

(24) Las posiciones recientes se encuentran influidas por los siguientes trabajos: CHAMBERLIN, Edward, H. "Proportionality, Divisibility and economies of scale" The Quarterly Journal of Economics, febrero 1948 y LEIBENSTEIN, Harvey: "The proportionality controversy and the theory of production", mismo periódico, noviembre 1955.

(25) Ver CASTAÑEDA, José, libro citado en nota 20 pag. 338, fig. 74

La concepción de que los valores que habían tomado las variables observadas en tiempos anteriores podían tener influencia, además de la influencia ejercida por los valores del tiempo presente, sobre los valores del futuro tiene numerosos precedentes, aunque fué formalizada a través de análisis monetarios y posteriormente como un desarrollo matemático del sistema keynesiano.

La idea de una periodificación concreta del tiempo se refleja en los análisis de Germán Bernacer, cuyos ensayos influyeron en el análisis periodificado monetario de Denis Robertson. Otro núcleo de actividad en este tipo de conceptualización fué la escuela de Estocolmo con sus análisis de las magnitudes "ex-ante" y "ex-post" a través del tiempo. (26)

Una formalización más estricta provino del lado keynesiano de la teoría económica. Alvin Hansen sugirió que los valores de la inversión agregada del periodo actual podían depender de los valores alcanzados por la renta nacional en periodos anteriores, sugerencia que fué formalizada por P.A. Samuelson en un trabajo pionero en el uso de diferencias finitas.

El análisis por periodos, o en diferencias finitas, quedó incorporado al tratamiento del tiempo como un instrumento matemático corriente.

(26) ver ROBERTSON, D. H. "A spanish contribution to the theory of fluctuations", *Economica*, febrero 1940. Reimpreso por Dawson & Sons, Londres, 1964, y OHLIN, Bertil "Algunas notas acerca de la teoría de Estocolmo sobre el Ahorro y la Inversión." *Economic Journal*, marzo, junio, 1937 incluido en "Ensayos sobre el ciclo económico" seleccionados por G. Haberler, Fondo de Cultura Económica, Mexico-Buenos Aires, 2ª edición 1956.

(27) SAMUELSON, P.A. "Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration"

La división del tiempo en periodos finitos, generalmente iguales, (semanas, meses, años) permite además de estructurar adecuadamente el tiempo, fechando el momento de la observación de las magnitudes, organizar el análisis en forma de fondos, o valores de las variables observadas en un momento del tiempo, y flujos, que miden las variaciones de los valores de las variables durante el periodo de tiempo.

Esta división del tiempo entra en la definición que en este ensayo se dará de discontinuidad. Es interesante señalar que bajo el nombre de principio de periodificación es la misma división que se acepta en la Contabilidad de Empresa y en la Contabilidad Nacional. Parece, pues, razonable sugerir que, si se desea organizar el conocimiento microeconómico con bases contables, la microeconomía cambie también su método de periodificación derivado del análisis de periodos (corto, largo plazo) de Marshall por una concepción del tiempo más estructurada.

Desde el punto de vista de la concepción continuidad-discontinuidad el significado de este cambio es descrito por Huberto Villar en los siguientes terminos: (28)

"Señalabamos (entonces) que uno de los problemas fundamentales del tratamiento del tiempo era el representado por el dilema continuidad-discontinuidad. Pero este problema no es exclusivo del tratamiento del tiempo, sino que puede alcanzar , y de hecho ha alcanzado a las demás magnitudes de la Teoría Económica

(28) Párrafo tomado de las páginas 5 y 6 de la edición española del libro de GOLBERG, Samuel "Ecuaciones en diferencias finitas." Marcombo, S.A. Barcelona, 1964; estas páginas están escritas por VILLAR, Huberto, bajo el título "Prólogo a la edición española"

que se ha visto así enfrentada con una doble posibilidad, ante la cual podía discurrir por cualquiera de los dos cauces. Eligió primero el de la continuidad, y ello por una razón sencilla, que, en último término, podría reducirse a una economía de esfuerzo. En la época en que los economistas empiezan a utilizar el lenguaje matemático era el más conocido, al menos para ellos, el análisis continuo. Estaba ya completamente elaborado, e incluso muy extendido, al menos entre los hombres de un cierto nivel cultural, el cálculo infinitesimal, en tanto que el análisis discreto, aunque elaborado - no hay más que recordar que la obra de Boole se publicó en 1860 - no era conocido más que por un limitado círculo de matemáticos."

g) La discontinuidad en la programación lineal. El método de los multiplicadores de Lagrange para calcular máximos f condicionados de funciones continuas, no es aplicable a la función lineal. Dado que este tipo de funciones son muy corrientes se desarrollo otro método aplicable a funciones lineales.

Su desarrollo se debió a George B. Dantzig (29) aplicándose inmediatamente después a la teoría de la producción.

- (29) Ver DANTZIG, George B. "Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities" reproducido como capítulo XXI del libro publicado bajo la dirección de KOOPMANS, Tjalling G. "Activity Analysis of production and allocation" Cowles Monograph no. 13, John Wiley and Sons New York, 6ª impresión 1965. Las explicaciones del texto están tomadas de BAUMOL, William J "Economic theory and operations analysis" Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 2ª edición, 1965.

El fundamento de la solución por programación lineal del problema de la producción se encuentra en la concepción ya expuesta en el apartado e) de coeficientes fijos de producción.

La programación lineal supone que se conocen las cantidades  $(a_1, a_2)$  necesarias de dos factores de la producción (pueden ser más, claro está) que se necesitan para producir una unidad de un producto:  $(y)$ . Cualquier cantidad del producto, por ejemplo  $(n)$  se puede obtener por el mismo procedimiento y con una cantidad proporcional de factores  $(na_1, na_2)$ .

Si sólo existiera un proceso de producción, el definido por los dos coeficientes de producción  $(a_1, a_2)$  no existiría alternativa, pero en realidad, y según supone el método de programación lineal, existen varios procesos de producción. El problema se plantea al desear conocer cuáles procesos de producción se utilizarán y en qué cantidades de cada uno.

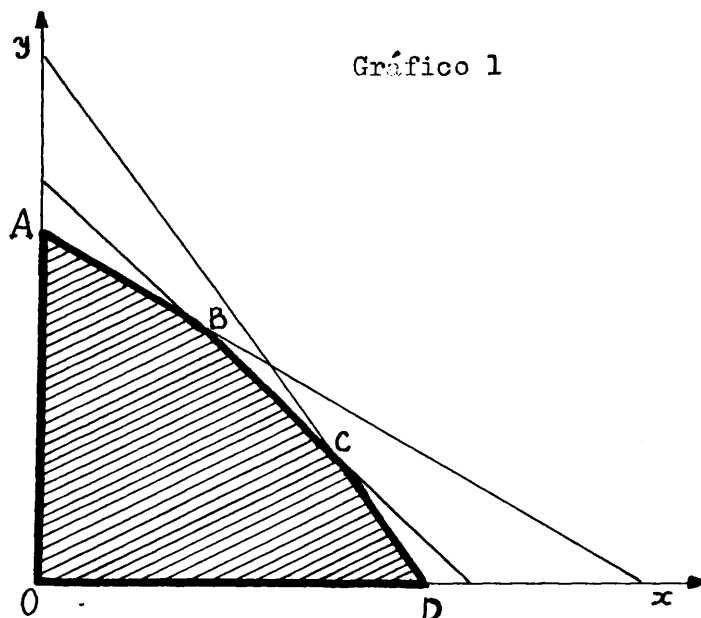
En este ensayo dedicado al problema de la continuidad y de la discontinuidad se desea meramente subrayar los aspectos relevantes de este problema para la cuestión planteada. Estos aspectos son dos.

Por una parte existe un planteamiento discontinuo en cuanto el número de procesos es finito, y en cuanto los coeficientes de producción son constantes. Este planteamiento, en este aspecto, es discontinuo. Por otra parte una vez elegido un proceso la cantidad que se puede obtener del producto con este proceso varía continuamente.



En la solución por programación lineal del problema de la producción, los procesos de producción son discontinuos y finitos en número, mientras que la cantidad de producto a obtener puede variar continuamente.

Otro aspecto interesante de la programación lineal se halla en el método del simplex para resolver el problema. (Ver gráfico 1)



La solución por el método simplex consiste fundamentalmente en elegir entre un conjunto de puntos infinito, el determinado por el conjunto cerrado del polígono OABCD, un número finito que puede ser solución del problema: los puntos (O, A, B, C, D), y establecer cuál de ellos es el más favorable, viendo cuál proporciona un valor máximo o mínimo de la función objetivo. Esto puede hacerse examinando uno a uno el valor de dichos puntos en la función objetivo, aunque el método del simplex provee de un procedimiento en que la convergencia hacia el valor máximo es mucho más rápida.

El método del simplex presenta las mismas características que el método de la discontinuidad que será desarrollado en el capítulo 4º. Consiste en los siguientes pasos, en un conjunto potencialmente infinito se seleccionan unos valores en número finito, entre los cuales se sabe que se hallará el máximo • El máximo se selecciona entre estos puntos examinando, mediante un criterio de ordenación, cuál es el que, efectivamente, da el valor máximo.

El método tiene dos fases: en una primera se selecciona entre los infinitos valores de un conjunto continuo, un número finito, entre los que se buscará el máximo o el mínimo. Posteriormente se ordena completamente el conjunto finito y se halla así el valor máximo y el mínimo.

h) Puntos de vista recientes sobre la discontinuidad. En un apretado resumen se ha recorrido el camino de la visión continuista y discontinuista en teoría económica de la producción.. ¿Es el enfrentamiento entre estas dos concepciones privativo de la teoría económica?. Aunque la información sobre la respuesta a esta pregunta se aparta de las posibilidades de conocimiento del autor, se expondrán algunas noticias acerca de ello.

Carl Boyer, citando a Schrödinger, dice lo siguiente: (30)

"Aunque la ciencia no puede extrapolar más allá de la experiencia haciendo los intervalos infinitamente pequeños, y aunque

(30) SCHRODINGER, Erwin, "Science and the Human Temperament" Nueva York, 1935, citado por Carl BOYER: "The history of calculus and its conceptual development", libro citado en nota 6.

este proceso pueda estar "inadecuadamente adaptado a la naturaleza", la matemática está en libertad de introducir el nuevo concepto de límite, sobre las bases lógicas mencionadas antes."

La discontinuidad aparece a veces patente, y, parece, que con una definición adecuada podría ser objeto de prueba. La continuidad, aunque en el campo matemático ha sido adecuadamente definida, es mucho más difícil de ser sometida a pruebas concluyentes. Estas dependen de los instrumentos y métodos de medida y, aún con notables progresos, es muy difícil que lleguen a proporcionar una prueba definitiva. No es este el lugar, ni el autor posee conocimiento, para comentar si la física necesita una concepción continua o finita del universo, tanto en lo grande como en lo diminuto, sin embargo las soluciones y las dudas de la física, por su influencia sobre la matemática y sobre todas las demás ciencias pueden ser de importancia.

En otro campo, el de la matemática, se ha prestado un interés creciente en los métodos fundados en la discontinuidad. Desde el trabajo pionero de George Boole, citado por Huberto Villar, la matemática discontinua ha experimentado un gran desarrollo. (31) La investigación se preocupa intensamente de este campo. (32)

(31)

Ver BOOLE, George "A treatise on the calculus of finite differences" Dover Publications, Inc. New York, 1960 (1ª edición 1860) y Kemeny, J.G. SNELL, J.L. y THOMSON, G.L. "Introduction to finite mathematics", Prentice Hall, 1957.

(32) De los múltiples tratados y ensayos que contienen la palabra finito o discontinuo en su título se citará el siguiente: ZIENKIEWICZ, O.C. y CHEUNG, Y. K. "The finite element method in structural and continuum mechanics" Mc-Graw-Hill, 1967. La razón estriba en que define un método similar al utilizado en el capítulo 4º: "el continuo se separa mediante líneas y superficies en un número finito de elementos discretos" (página 5).

La estadística, en el examen de las diversas posibilidades de definición de la amplitud del intervalo de observación de las magnitudes medidas, se enfrenta también con el dilema continuidad-discontinuidad. (33)

La utilización masiva de ordenadores electrónicos digitales para los cálculos matemáticos y en el sistema económico favorece también una visión discontinua de la matemática. Como la capacidad de almacenar cifras de un ordenador es finita, también deberá serlo el grado de aproximación de las medidas de las magnitudes que almacena. Por otra parte, el modo de operar de los ordenadores digitales se funda en la aritmética. Por esta causa muchas de las técnicas operatorias del análisis diferencial e integral continuo tienen un análogo discontinuo aritmético. (34)

En torno a la finitud y la discontinuidad han aparecido un conjunto de algoritmos y técnicas operatorias, que han conducido, en opinión del autor, al cálculo discontinuo a la situación en que se encontraba el cálculo diferencial en 1850. Desde esta fecha hasta fin del siglo XIX, después de desarrollada la operatoria, se investigaron los fundamentos, que ahora son comprendidos. Por el contrario, parece que el cálculo discontinuo debe aún encontrar definitivamente los suyos, y que deberá avanzarse un buen trecho

(33) Véase STEVENS, S.S. "On the theory of scales of measurement" Science, 1946 y "Measurement and man", Science 1958. También DOWNIE, N.M. "Fundamentals of Measurement" Oxford University Press, 2ª edición, 1967.

(34) Véase SCHEID, Francis, "Numerical Analysis, theory and problems" Schaum's Outline series, McGraw-Hill Book Company, 1968.

hasta una exposición lógica y comprensiva del significado matemático de la discontinuidad. Este trabajo contiene una reflexión desde un ángulo muy concreto, sobre este problema, sin embargo ha sido inevitable aportar también algunas sugerencias acerca de su significado general.

i) En torno a la definición de función continua. En el apartado c) de este capítulo se ha abandonado la reseña del significado matemático del problema de la continuidad, para seguir con su significado económico. Hacia 1890 la operatoria del cálculo diferencial ha penetrado ya la economía y las investigaciones que sobre sus fundamentos se están realizando por esta época, al no modificar la operatoria, no parecen afectarle fundamentalmente.

Sin embargo hay un pequeño matiz que debidamente subrayado puede tener alguna importancia. Se ha expuesto (apartado d) que la función continua pasa a ser el instrumento clave en que se apoyará la teoría económica. Como consecuencia de las investigaciones de fundamentos de Georg Cantor (35) se efectúa un reajuste en la definición de función continua.

Aún sigue siendo corriente en bastantes tratados de matemáticas para economistas definir la continuidad de una función en el entorno de un punto. Una función será continua si para un incremen-

(35) Para bibliografía ver nota 6 y capítulo siguiente.

to cualquiera arbitrariamente pequeño, positivo o negativo, del valor en cuyo entorno se comprueba la continuidad, siempre exista un valor de la variable que permita a la función adquirir un valor aun más pequeño. (36).

Es aproximadamente cierto (37) que para que esta condición se cumpla el campo de variación de las variables dependientes e independientes debe ser el de los números reales. (38)

Este hecho es perfectamente conocido por los economistas matematicos, aunque no se haya subrayado excesivamente, ya que, una vez aceptada la continuidad, su definición en el campo numérico no tiene demasiada importancia.

Sin embargo al intentar trasladar el problema hacia un enfoque discontinuo, esta pequeña diferencia si es importante. En opinión del autor de este ensayo, una definición correcta de discontinuidad debe darse, como también la de continuidad, en el estudio de los campos numéricos conocidos.

Por esta causa, y para dar una definición de discontinuidad, se estudiarán en el próximo capítulo diversos campos numéricos: enteros, racionales y reales.

(36) Una definición más técnica: y menos intuitiva es la que da ALLEN, R.G.D. libro citado en nota 18, páginas 95 y 96.

(37) Ver RUSSELL, Bertrand: "Introduction to mathematical philosophy" London, George Allen and Unwin (13ª impresión), 1970 (1ª edición 1919), capítulos X y XI.

(38) Ver REY PASTOR, Julio "Teoría de las funciones reales" Madrid 1933 y PIERPONT, James "The theory of functions of real variables", volumen one, capítulos I-VII. Dover Publications, Inc. Nueva York 1959 (1ª edición 1955).

Del mismo modo cabe decir que la definición de discontinuidad que se desea hallar no consiste, como es corriente, en hallar los puntos o tramos discontinuos dentro de una función continua, ya sea por salto de la función, porque presente un pico o porque se haga infinita en alguno de sus puntos, (39) sino en investigar la posibilidad de que los valores de la variable independiente y dependiente crezcan siempre a saltos.

Esto es muy fácil si las magnitudes se cuentan por medio de los números enteros: (1, 2, 3, 4, .....), para otras magnitudes parece más conveniente suponer continuamente.

Tomemos como ejemplo el tiempo. Estrictamente la hipótesis de continuidad afirma que en el periodo de cinco minutos existen infinito número de (digamos) instantes.

La hipótesis de discontinuidad afirma que en el periodo de cinco segundos existen:

300.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 instantes (por ejemplo), o sea un número finito.

Los instrumentos de medida del tiempo no nos permiten decidir en favor de una o de otra hipótesis, sin embargo, siempre que sea posible, y por el principio de la navaja de afeitar de Ockam, es conveniente no suponer que las magnitudes no pueden dividirse más

(39) Ver ALLEN, R.G.D., libro citado en nota 18, páginas 96, 97 y 98.

El tratamiento que hace SAMUELSON del problema de la discontinuidad se funda fundamentalmente en esta idea de una función discontinua, solo como excepción, sobre una función continua. (Ver "Foundations", nota (4), páginas 70-73). Sin embargo, algunas proposiciones son válidas para el tratamiento de la discontinuidad aquí propugnado, especialmente la demostración del carácter negativo de la demanda, con relación al precio.

más allá de lo que permiten apreciar nuestros instrumentos de medida, aunque a veces suponer lo contrario ayude a resolver algunos problemas como los del movimiento.

En definitiva, la prueba sobre la continuidad y discontinuidad parece en muchos casos (espacio y tiempo) innacesible, en otros (teoría atómica) parece en cierto modo posible. (40)

Desde el punto de vista de la economía, en que las precisiones en la medición no necesitan llegar a tales extremos, lo que deseamos mostrar es que la discontinuidad genera otro tipo de estructuras matemáticas, quizá más adaptadas al cálculo económico, que las que genera la continuidad.

---

- (40) Una de las desventajas de la continuidad es que no es tan evidente la arbitrariedad de las unidades de medida. Mientras aparece claro que la elección de una unidad de cuenta para generar una serie finita es arbitraria, esto no aparece tan claro en el caso de la discontinuidad. Sin embargo, (aunque no sea argumentado en esta obra) por poderse generar el infinito de muchas maneras, caben infinitos de distinta densidad, y por ello generados también de muchas maneras. Sobre este punto no se volverá a insistir en este ensayo.



Capítulo 2.º—Medida, continuidad y  
campos numéricos.

"El número, lenguaje de la Ciencia"

Tobías Dantzig:

"Number, the language of science"

C A P I T U L O    2º  
=====

MEDIDA, CONTINUIDAD Y CAMPOS NUMERICOS.

ooooo

2 - a. Las series continuas y discontinuas. En este capítulo se expondrán las principales características que definen las series continuas y se precisará el sentido que se desea dar en este ensayo a la expresión serie discontinua.

Una exposición preliminar de las propiedades de cada una de los dos tipos de series que serán consideradas puede ayudar a centrar la cuestión, y a comparar las definiciones.

Se considerara que son series continuas, las series, ordenadas, densas (por lo tanto infinitas), y compactas. Se tomará como ejemplo de esta tipo de series la de los números reales, ya que se pretende también comentar el uso que se hace de esta serie de números como soporte del cual se extraen los números que sirven para expresar medidas numéricas cardinales. (41)

(41) Ver HUNTINGTON, E.V. "The continuum and other types of serial order", Dover Publications, Inc. 1963.

Las series discontinuas se conciben como series ordenadas "no densas" y "finitas". En este ensayo por el interés que existe en tomar estas series como fundamento de las medidas de magnitudes, los elementos que las formarán serán números racionales.

Los términos contenidos en las definiciones: "orden", "finito"- "infinito", "densidad" y "propiedad de ser compactas" serán brevemente expresados y definidos a continuación, con el objeto de hacer este ensayo autocontenido.

También será expuesto que las series continuas son no numerables y poseen la potencia del continuo (alef 1), mientras las series discontinuas son numerables y finitas.

b) El orden como idea previa. Ambos tipos de series definidas: las continuas y las discontinuas tienen una nota común: la de ser series ordenadas. Esta idea previa expresa que una magnitud es susceptible de igualdad y de variación, o sea de encontrar estados de la misma que son mayores que otros, sin una especificación numérica de este carácter de "ser mayor que". (42)

Por esta causa el orden establecido entre un conjunto de elementos no estriba tanto en los elementos que se ordenan como en la relación que les une.

En palabras de Russell: (43)

"El orden estriba, no en la clase de términos, sino en una

(42) RUSSELL, Bertrand, "The principles of mathematics", George Allen And Unwin, 2ª edición, 8ª impresión 1964, capítulos XIX, XX y XXI.

(43) RUSSELL, Bertrand, "Introduction to Mathematical Philosophy" George Allen & Unwin, Londres, 13ª impresión, 1970, páginas 30 y 31.

relación entre los elementos de la clase, en cuya virtud unos aparecen primero y otros después."

Dado un conjunto, pues, es fundamental para poder ordenarlo considerar primero cual es la relación que va a ser el fundamento del orden. (44)

Un conjunto de elementos puede ser ordenado atendiendo a diferentes relaciones, de modo que en el orden resultante los elementos se encuentren en diferentes posiciones. Sean, por ejemplo, los miembros del Parlamento Británico. Su orden de entrada en la Abadía de Wensmister para un acto religioso sería distinto si primero entraran: 1º) los de mayor edad, 2º) por orden alfabético, 3º) por estatura de menor a mayor, 4º) por la cantidad que pagan de contribución sobre la renta, 5º) por las notas que obtuvieron en sus exámenes de doctorado, 6º) por orden de antigüedad en su ingreso por primera vez en el parlamento.

Al examinar las anteriores relaciones de orden podemos comprobar dos situaciones que es necesario destacar. Una de ellas es que puede haber diputados que entraron el mismo día en el parlamento y sea difícil decidir si van a ir primero o después, en pura lógica deberían entrar todos juntos. Estos diputados constituyen

- (44) El estudio sistemático del orden fué introducido en teoría económica por ARROW, Kenneth, J. "Social Choice and Individual Values", Cowles Monograph 12, 2ª edición 1963 (1ª, 1951) John Wiley and Sons, Nueva York, Capítulo II. Esta más extensamente tratada en DEBREU, G. "Théorie de la valeur, analyse axiomatique de l'équilibre économique", Dunod, Paris, 1966 1.2, 1.3 y 1.4 y por HICKS, John R. "Revisión de la teoría de la demanda", Fondo de Cultura Económica, Mexico-Buenos Aires, 2ª edición en español 1958. Capítulos IV y V.

una clase de equivalencia, que en economía será más conveniente seguir llamando clase de indiferencia, por corresponder a la idea de curvas de indiferencia.

Otra observación que puede ser útil realizar es la siguiente. Al examinar la posibilidad de clasificar y ordenar los miembros del Parlamento por medio de las calificaciones obtenidas al conseguir el título de Doctor, puede constatar-se que es posible que algunos de los Diputados no lo hayan conseguido. En este caso no es posible establecer la relación con sus compañeros doctores.

Esto indica que, dada una relación, no siempre es posible establecer su existencia entre dos miembros cualesquiera de un conjunto. Dado este y una relación ordenadora podremos decir que existe un orden total si la relación se da entre todos los pares de elementos del conjunto, mientras que si sólo existe en algunos de ellos la relación de orden es parcial.

Se desea subrayar que el establecimiento de un orden entre los elementos de un conjunto implica el examen de la relación entre todos los pares de conjuntos. Por lo tanto para construir un orden completo, implícita o explícitamente, deberán examinarse todos los pares uno a uno. Esto se podrá hacer con mucha mayor facilidad si el número de pares es finito. (45)

(45) Una exposición más formalizada de estas ideas se incluye como apéndice matemático 1. Queda justificado la necesidad de desarrollar estas ideas dado que el método de calcular máximos se funda, para el caso de discontinuidad, en la posibilidad de organizar un orden completo si el número de elementos a ordenar es finito.

Hay que señalar que el orden a que nos referimos es el orden lineal o serial. Existen otros tipos de orden como el circular. Si examinamos la ordenación de las personas sentadas alrededor de una mesa redonda, será muy difícil sin un convenio previo, decir cual es la primera, ya que podemos comenzar la ordenación por cualquiera de ellas sin que se sugiera especialmente una determinada. Este tipo de orden queda excluido de nuestros razonamientos.

Otro tipo de orden que excluiríamos es el lexicográfico. Este fué introducido por Debreu (46), y puede tener importancia en algunas conductas patológicas. Sea por ejemplo una persona tan aficionada a la droga que después de adquirir su sustento mínimo todo el dinero restante, sea el que sea, lo seguirá empleando en comprar drogas. Esta persona no tiene un campo de elección de consumo normal, ya que los precios de los bienes no afectan su conducta.

Una vez determinado que para que exista un orden es necesario la existencia de una relación, que para que exista un orden total debe existir esta relación en todos los pares de elementos del conjunto, debemos examinar someramente, los tipos de relaciones que dan lugar a un orden. Ya se ha comentado en el caso de clases de equivalencia o indiferencia que no todo tipo de relaciones conducen a una ordenación.

(46) Ver DEBREU, Gerard "Representation of a preference ordering by a numerical function", Capítulo XI en R.M. Thrall, C.H. Coombs, y R. L. Davis, "Decision Processes", reproducido en Newman, Peter "Readings in Mathematical Economics", volumen I, John Hopkins Press, Baltimore, 1968, página 257. (Footnote 1) Este artículo desarrolla matemáticamente las mismas ideas expuestas aquí literariamente.

Como estamos principalmente interesados en examinar las relaciones que pueden dar lugar a un orden y también a una equivalencia (indiferencia) examinaremos previamente las propiedades de las relaciones que nos permiten definir tanto el orden como la equivalencia. (47)

Una relación diremos que es reflexiva, si tomando un elemento de un conjunto que deseamos ordenar, comprobamos que tiene esta relación consigo mismo. Ejemplo: Una persona no puede ser hija de si mismo. Por lo tanto "ser hijo de" no es una relación reflexiva. No hay ningún inconveniente en enunciar que tres es igual a tres. Por lo tanto "ser igual a" es una relación reflexiva.

Una relación diremos que es recíproca, cuando no importe el orden en que examinamos dos elementos del conjunto que deseamos ordenar. La relación se cumple con independencia del orden. Ejemplo: Si afirmamos que Juan es hijo de Pedro, no podremos afirmar que Pedro es hijo de Juan. Por lo tanto la relación "ser hijo de" es una relación no recíproca, que no nos es permitido cambiar los ordenes de los elementos. En cambio si decimos que: tres por dos es igual a seis, estamos ante una relación recíproca porque también es cierto que seis es igual a tres por dos.

Una relación es transitiva cuando el hecho de que dos elementos la posean en común con un tercero, implica que la poseen entre sí.

(47) Ver RUSSELL, Bertrand, libro citado en nota 43. Capítulos IV, V y VI, aunque la terminología no es exacta a la empleada aquí.



Ejemplo: Si decimos: Juan es hijo de Pedro, y Antonio es hijo de Juan, no es cierto que Antonio sea hijo de Pedro (es su nieto). Por lo tanto la relación "ser hijo de" no es transitiva. La relación transitiva sería "ser descendiente de". Por otra parte si decimos: tres por dos es igual a seis, la raíz cuadrada de treinta y seis es igual a seis, podemos decir que tres por dos es igual a la raíz cuadrada de treinta y seis. La relación de igualdad es transitiva.

Definiremos la relación de orden como aquella que posee las propiedades de ser: no reflexiva ( $aRa$  no se cumple), no simétrica o anti-simétrica (si  $aRb$  no  $bRa$ ) y transitiva (si  $aRb$  y  $bRc$  entonces  $aRc$ ).

Ejemplos importantes de estas relaciones son: "ser mayor que" y "ser preferido a".

Definiremos como relación de equivalencia a la que posea las propiedades siguientes: reflexiva ( $aRa$  se cumple), simétrica (si  $aRb$ , entonces  $bRa$ ) y transitiva (si  $aRb$  y  $bRc$ , entonces  $aRc$ ).

Ejemplos importantes de estas relaciones son: "ser igual a" y "ser indiferente con".

Una relación total de orden permite construir un conjunto totalmente ordenado, aunque no siempre si el número de elementos es infinito, una relación total de <sup>alencia/</sup>equiv permite definir una clase de equivalencia.

Para que la relación de orden sea total debe cumplirse que dados dos elementos cualesquiera del conjunto siempre se podrá determinar cuál es el primero en la relación ( o bien  $aRb$  o bien  $bRa$ ), para todos los elementos del conjunto a ordenar.

c) Series ordenadas crecientes. Estamos interesados en examinar, sin agotar este examen, algunos tipos de series totalmente ordenadas formadas por elementos que son números, y que tienen como criterio de orden el de "ser mayor que".

Ejemplo de un tipo de serie como el definido es la siguiente: (7, 11, 49, 83). En esta serie los elementos son números, están ordenados en forma creciente ("ser mayor que") y la serie está totalmente ordenada.

Una primera distinción útil para nuestro propósito es la de las series de este tipo que tienen un número finito o infinito de términos.

En el caso de series finitas es lógicamente posible suponer que es posible mencionar, escribir o señalar todos los elementos del conjunto. Por lo tanto pueden ser definidas por extensión. (48)

En cambio en las series infinitas difícilmente se podrá agotar la consideración de todos sus elementos y su definición deberá darse mediante una regla de generación.

(48) LANGER, Susanne K. "An introduction to symbolic logic". Dover Publication, Inc. Nueva York, segunda edición 1953. Capítulo V.

Por ejemplo, la serie de los números naturales puede generarse sumando 1 al número 0, y reiteradamente sumando 1 al número resultante. (0, 1, 2, 3, 4, 5, .....)

Examinaremos en primer lugar algunas definiciones y propiedades de las series finitas, ordenadas totalmente según el criterio de "ser mayor que" y constituidas por números. (se excluyen en principio los reales).

Diremos que un elemento de esta serie es el máximo cuando el primer termino de su relación domina a todos los demás elementos del conjunto. Es decir, puede permanecer como primer elemento de la relación con cualquiera de ellos.

Un elemento cualquiera de la serie "está entre" dos subconjuntos de la misma. En uno de ellos están todos los elementos que domina, en otra todos los elementos por los que está dominado. (49). En general diremos que "está entre" el mínimo y el máximo de estas clases.

La propiedad de las series ordenadas totalmente y finitas de tener un máximo, será el fundamento del método desarrollado en el capítulo 4.

Con relación a las series que están formadas por un número infinito de términos deberemos distinguir dos tipos distintos.

(49) Es importante para la validez lógica del argumento definir primer termino y segundo término sin referencia a la constitución del orden. Para ello ver apendice matemático 1.

En un tipo de serie el valor de la misma puede llegar a ser tan grande como se desea, o sea dado un número concreto por grande que sea, siempre la serie puede tomar un valor superior al mismo.

Por ejemplo: en el caso de la serie natural se puede imaginar un número muy grande:  $125.318^{326.130}$ , para conseguir un número mayor basta sumar 1 a este número.

Se han descubierto otro tipo de series formadas por infinito número de términos crecientes que permanecen siempre por debajo de un valor. En este caso decimos que se trata de series acotadas. Por ejemplo: la serie: (3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159.....) que define el número pi tiene infinito número de términos y sin embargo siempre permanece por debajo de 4. Si podemos encontrar un número cuya diferencia con los valores de la serie, a medida que esta crezca, llegue a ser inferior a cualquier número dado y arbitrario, por pequeño que sea, diremos que la serie tiene límite. (50)

Hay que señalar que este tipo de series no tienen un máximo, ya que sus valores crecen indefinidamente. El límite no es el máximo de la serie porque no forma parte de ella. Esta proposición será examinada de nuevo al tratar de los números naturales y reales.

Se ha definido el concepto de "estar entre", que será debidamente matizado más adelante para este tipo de series infinitas. Otro

(50) Estas notas deben completarse con la lectura de los siguientes trabajos: MATAIX ARACIL, Carlos: "Algebra Práctica", cuarta edición, Nuevas Gráficas, S.A. Madrid, 1950, capítulo XIII y FZ. DE TROCONIZ, Antonio y BELDA, Enrique "Análisis algebraico" La Editorial Vizcaina, S.A. Bilbao, 1961, Capítulo XVII.

concepto importante es el de "ser sucesor de". En el caso de series ordenadas (por el criterio "ser mayor que") de números, con la propiedad de ser finitas, existe una relación fácil de especificar entre los conceptos de "estar entre" y "ser sucesor de". Cuando un número está entre otros dos, el sucesor de este número es el mínimo de la clase de los números mayores que él.

Sea el conjunto ordenado: (7, 11, 43, 85). El número 43 se halla entre los números 11 y 85. Su sucesor es el 85 que cumple la propiedad de ser el menor de todos los números que le siguen y son mayores que 43. (En este caso particular es el único).

Con estos conceptos podremos definir una serie densa. Se ha dicho en la definición de continuidad que las series continuas eran "densas" mientras que las series discontinuas eran "no densas". Se precisará a continuación el significado.

Sea la siguiente serie ordenada de fracciones:

( $3/5$ . . . . .  $9/16$  . . . . .  $6/7$ )

Tal como está escrita cumple lo siguiente:  $9/16$  se halla entre  $3/5$  y  $6/7$ . Si hemos dejado los puntos ha sido para indicar que es posible intercalar nuevos términos:

( $3/5$ . . . . .  $12/19$  . . . . .  $9/16$  . . . . .  $15/21$ ... .  $6/7$ )

La serie será densa cuando entre dos cualesquiera de los términos es posible intercalar un número infinito de nuevos términos.

La serie de los números naturales (0, 1, 2, 3, .....)

no es densa porque entre el 1 y el 2 no podemos intercalar ningún otro número. La serie de todas las fracciones, de la cual hemos tomado el ejemplo anterior es densa porque entre dos fracciones siempre

es posible intercalar un número infinito de fracciones. Para generarlas puede adoptarse el siguiente procedimiento. Se toman dos fracciones cualesquiera ( $3/5$ ,  $6/7$ ), se forma otra fracción sumando numeradores y denominadores de ambas fracciones. La nueva fracción está entre las dos: ( $3/5$ ,  $9/14$ ,  $6/7$ ). El mismo procedimiento se puede repetir indefinidamente entre la primera fracción y la fracción resultante.

La densidad atribuible a los números fraccionarios (rationales) lo es también al espacio y al tiempo. Entre dos puntos cualesquiera de una recta existe un número infinito de otros puntos. La misma propiedad se atribuye a dos instantes del tiempo.

Así Russell define la continuidad del movimiento del siguiente modo: (51)

"¿Qué queremos decir al afirmar que el movimiento es continuo?. No es necesario para nuestros propósitos todo lo que los matemáticos quieren dar a entender con esta declaración: sólo parte de lo que declaran es filosóficamente importante. Parte de lo que quieren decir es que, si consideramos dos posiciones de una trayectoria ocupadas en dos instantes, habrá otras posiciones ocupadas en dos instantes intermedios. Por muy juntas que tomemos las dos posiciones, la trayectoria no saltará de pronto de una a otra, sino que pasará por un número infinito de otras posiciones por el camino."

(51) RUSSELL, Bertrand: "Our knowledge of the external world." George Allen & Unwin, Ltd. Londres, 5ª impresión (1969) de la edición revisada, página 139.

Una serie es compacta cuando no sólo contiene todos los elementos de la serie, sino también todos sus límites, o todas las series parciales que con los elementos se puedan constituir. Este concepto será desarrollado al tratar de los números reales a partir del concepto de medida. Puede aplicarse hasta entonces su mejor explicación. (52)

d) La teoría de los números. En el actual estado de la cuestión (53) el conocimiento de los números se sitúa dentro de conceptos lógicos fundamentales como el de conjunto y dentro de estructuras algebraicas fundamentales. (54) Las notas sobre los números y los campos numéricos (55) que siguen están inspiradas en el proceso llamado aritmetización del análisis, un tanto superado ya, pero conveniente para la finalidad que se persigue.

e) Conjuntos, correspondencias y números naturales. Hasta ahora hemos admitido que existen conjuntos de objetos capaces de ser ordenados. En algunos casos hemos considerado conjuntos de objetos que eran números. Es necesario sin embargo examinar la relación que existe entre los números y otros conjuntos de objetos, para tener una teoría lógica suficiente del número y por otra parte

(52) Ver GALLI, Luis A. "Algebra para economistas", 1ª parte. Editorial Macchi, Buenos Aires 1963 Capítulo VII

(53) Desde los primeros balbuceos con números enteros hasta nuestros días la historia de los números ha estado llena de invenciones y no está terminada. Ver DANTIZIG, Tobias "Number, the language of science", 4ª edición revisada y aumentada, Doubleday, 1953.

(54) Ver PIATIER, André, CAHUZAC, Pierre y CHAMBADAL, Lucien "Economie et Mathématiques", tomo primero, Presses Universitaires de France, 1965

(55) ARNAIZ GIL y PELAEZ VEGAS "Matemáticas para economistas" Apuntes, Tomo 1º, Introducción, capítulo III: "Campos numéricos".

para procurar distinguir el conjunto de los números de otros conjuntos que van a ser contados y medidos a través de números.

Un problema matemático-filosófico fundamental es el de determinar qué cosas pueden ser una unidad, o sea la naturaleza de los objetos que pueden ser elementos de un conjunto. La capacidad lógica de organizar conjuntos, de acotarlos y tipificarlos es fundamental para la visión numérico matemática del mundo. Este problema que debe levantar forzosamente algunas cautelas lo supondremos resuelto.

Consideraremos por ello que existe un conjunto de números llamados naturales, que puede ser generado a partir del uno, sumando sucesivamente una unidad a uno, y a los números que resulten de la suma. Este conjunto es el siguiente: (56)

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots)$$

Dado un conjunto cualquiera de elementos podemos organizar una correspondencia entre los sucesivos elementos de dicho conjunto y la serie de los números naturales, de modo que a cada sucesivo elemento del conjunto corresponda un número sucesivo en la serie de los números naturales. El último de estos será el número del conjunto. (57)

(56) El número cero está definido en el apéndice matemático y puede definirse como el conjunto cuya descripción existe y que no tiene ningún elemento, (conjunto vacío).

(57) Russell utiliza la correspondencia para definir lógicamente el número natural. Para él y Whitehead el número es la clase de todas las clases que pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Ver libro citado en nota 43, capítulo II



Sea, por ejemplo, el conjunto de letras siguiente: (m, t, r, u, y, e). Para hallar su número estableceremos la siguiente correspondencia uno a uno: (m, 1) (t, 2) (r, 3) (u, 4) (y, 5) (e, 6). El número del conjunto de letras es el número que corresponde al último par. En este caso el 6. Se denomina contar a la operación de determinar el número que corresponde a un conjunto.

Es conveniente definir con mayor atención la operación efectuada de hacer corresponder uno a uno los elementos de un conjunto (dominio) con los de otro conjunto (imagen), ambos ordenados. llamaremos a esta operación aplicación y consistirá en hacer corresponder a un elemento del conjunto uno y solo uno del otro conjunto y viceversa. (58)

La aplicación uno a uno o biunívoca permite definir la función uniforme empírica, en la cual a cada valor de la variable independiente (dominio) corresponde un solo valor de la variable dependiente (imagen).

Es conveniente examinar algunas propiedades de los números naturales. La serie de los números naturales puede ordenarse de acuerdo con la relación "ser mayor que". Esta propiedad es evidente porque estamos acostumbrados a utilizar la serie de los números naturales de acuerdo con este orden.  $N = (1, 2, 3, 4, \dots)$  Sin embargo este orden no es único. Podemos convenir en escribir los tres primeros números en orden creciente, los tres siguientes en orden decreciente, y así de nuevo los siguientes:  $N = (1, 2, 3, 6, 5, 4, 7, 8, 9, 12, 11, 10, \dots)$

(58) Para un estudio más detallado de la aplicación vease: RIOS, Sixto, "Álgebra lineal" Madrid, 1966 Capítulo, 4.

Esta serie no es densa. Entre dos números cualesquiera sucesivos (p. ej. 31 y 32) no es posible intercalar o introducir ningún otro número del mismo campo numérico.

Se examinará ahora si esta serie es finita o infinita. Es evidente que la serie puede crecer más allá de todo límite. Así podemos imaginar y escribir un número entero muy grande. Siempre será posible añadirle uno y formar otro mayor. Cantor, sin embargo, investigó la posibilidad de que existiera un número (alef cero) que fuera mayor que cualquier número que pudiera generarse inductivamente, es decir sumando unos a alguno de los números naturales.

Este número al que Cantor denominó transfinito tiene propiedades muy curiosas, de las cuales sólo vamos a destacar una (59). El número alef cero, o transfinito, tiene la propiedad de que entre él y cualquiera de los números naturales existen infinitos términos, elementos o números.

Sea por ejemplo el siguiente número:

3.217.896.745.327.. . . . . alef cero

o cualquiera mayor, para llegar al alef cero tendremos siempre que sumar un infinito número de veces uno, y aun no llegaremos.

Con ello tenemos base suficiente para establecer una primera

(59) Ver KURATOWSKI, Kazimierz "Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología" Editorial Vicens Vives, Barcelona, 1966 Capítulos 4 y 5.

condición de finitud de los conjuntos discontinuos. Es muy difícil decidir si existe alguna magnitud que puede crecer más allá de todo límite hasta alcanzar el alef cero, pero efectuamos la hipótesis de que si tal magnitud existe no es de naturaleza económica. Por lo tanto las magnitudes económicas consideramos que pueden ser muy grandes y alcanzar valores muy grandes, pero tendrán una cota que puede ser también generada inductivamente y que será distinta de alef cero. (60)

Por lo tanto las magnitudes económicas discontinuas, podrán ser solamente puestas en correspondencia biunívoca con parte de la serie de los números naturales y no poseerán la potencia de los números naturales, (alef cero).

Bajo estos requisitos la serie acotada inductivamente de los números naturales es seguramente una buena base para la definición de discontinuidad.

b) Los números racionales. Sin perjuicio de intentar un esquema de definición lógica, se desea mostrar la génesis de los números racionales o fraccionarios como consecuencia de un problema de medida. Si después de definir la unidad la dividimos en partes iguales, podremos suponer que hemos creado una nueva unidad y contar las partes con la serie de los números naturales. Las partes en que dividimos la unidad se expresarán en un número que llamamos denominador y el número que cuenta estas partes numerador.

(60) Ver KASNER, Edward y NEWMAN, James: "Mathematics and the imagination", Simon and Schuster, Nueva York, 1956 "Beyond the googol", pagina 27 y siguientes.

Así si se ha dividido una sandía en 7 partes y se han retirado 2, habremos realmente cogido  $2/7$ , de una sandía.

Desde el punto de vista de la medida al utilizar números fraccionarios lo que hacemos es cambiar la unidad. Definimos un nuevo uno y establecemos una relación entre este nuevo uno y el anterior.

Los números racionales o fracciones pueden ser definidos de un modo más riguroso como pares de números ordenados y es conveniente recordar que contienen como parte los números naturales, y también que es posible con ellos definir las mismas operaciones que con los números enteros, (61).

Para examinar las propiedades de orden, densidad y finitud de las series de números racionales debemos alterar ligeramente el orden. Es conveniente aquí comenzar con las propiedades de densidad, que fueron históricamente conocidas primero y lógicamente son más sencillas.

Ya se ha dicho que es siempre posible entre dos fracciones incluir un infinito número de ellas. Por ejemplo entre  $3/5$  y  $7/8$

$3/5$  . . . . .  $7/8$

cabe un infinito número de fracciones, ordenándolas de menor a mayor. (Ver apartado c). Por lo tanto es imposible mediante el criterio de "ser mayor que" escribir todo el conjunto de los números

(61) Ver RUSSELL, libro citado en nota 43, capítulo VII.

racionales (fraccionarios) ya que estrictamente no puede definirse el "ser sucesor de". En la serie de los enteros, el 27 es el sucesor del 26, mientras que entre los números fraccionarios no es posible mediante la relación "ser mayor que" definir cuál número va después de  $3/5$ . Por un momento supongamos que sea  $4/5$ . El fraccionario  $7/10$  cumple ser mayor que  $3/5$  y menor que  $4/5$ .

En el apartado anterior veíamos que los números naturales generaban un tipo de infinito, el más intuitivo. Los números racionales (fraccionarios) generan otro tipo de infinito: la serie infinita de otros números racionales que pueden intercalarse entre dos cualesquiera de ellos. Ya hemos dicho que una serie que goce de esta propiedad es una serie densa.

La densidad es una propiedad fundamental de las series continuas. Al suponer que una medida de una magnitud puede ser continua admitimos que podemos utilizar como medida el conjunto de todos los números racionales, que son infinitos.

Pero puede resultar más ilustrativo examinar este mismo problema de la medida desde otro punto de vista. Otro sistema de crear un número infinito de números fraccionarios consiste en aumentar el denominador en uno. Vamos a partir del número  $3/5$ . A partir de él puede generarse la siguiente serie:  $(3/5, 3/6, 3/7, 3/8, \dots, 3/5+n, \dots)$  Si observamos el denominador vemos que crece sin límite. Recordando lo que significaba el denominador desde el punto de vista de la medida, deberemos admitir que para utilizar todas las fracciones como base de medidas la división de la unidad tampoco debe tener límite, y hemos

de estar dispuestos a admitir que se pueden formar unidades de medida tan pequeñas como se desee.

Si esto no es posible (porque no lo permiten los instrumentos y métodos de medida) o no es conveniente (porque por convención se estipula que sólo se alcanzarán aproximaciones a las medidas de determinado orden) el número de fracciones que van a ser utilizadas como base para la medida pasará de ser infinita a ser finita.

Por ejemplo si se ha convenido que el grado de aproximación será superior a  $0,00000001$  de unidad todas las fracciones con denominador inferior deberán ser suprimidas de la serie de las fracciones. Y el número de fracciones que tienen un denominador fijo es finita. Hemos eliminado la propiedad de ser "densas".

Por lo tanto al establecer una unidad de medida mínima para cada magnitud estamos convirtiendo un conjunto infinito numerable en un conjunto finito, (62).

Si tomamos como nueva unidad de medida la nueva unidad todas las medidas de la magnitud podrán establecerse en números enteros.

- (62) El conjunto de todas las fracciones es numerable, o sea puede establecerse una correlación biunívoca entre los enteros y las fracciones. Aunque no es posible generar todas las fracciones mediante la relación "ser mayor" que, Cantor descubrió otro sistema muy simple de generar ordenadamente el conjunto de todas las fracciones, que, por ello, podía ponerse en correspondencia biunívoca con los enteros. Con ello se demostraba una vez más que el alef cero era un número "reflexivo" ya que el conjunto de todas las fracciones puede contener como subconjunto el conjunto de los números naturales. Ver KURATOWSKY, citado en nota 59, páginas 51-70 y RIOS, Sexto, libro citado en nota 58, ejercicio 8, donde está el orden que deben tomar los racionales para ser numerables.

El conjunto "no denso" así formado podrá ser ordenado como un conjunto de números enteros y ya admitirá la relación "ser mayor que", y la definición estricta de "ser sucesor de".

De este modo quedan interpretadas las principales propiedades establecidas para las series continuas y discontinuas: continuas (ordenadas, densas, infinitas), no continuas (ordenadas, no densas, finitas). Falta ahora examinar la propiedad de "ser compactas".

e) Los números reales. Se desea también mostrar como los números reales fueron creados por problemas de medida, entre otros, también importantes. Se ha comentado que si se desea medir la longitud de la diagonal de un cuadrado tomando como unidad el lado, aparece el número  $\sqrt{2}$  del cual puede demostrarse que no es igual ni a ningún número entero ni fraccionario. Sin embargo pueden calcularse dos series de números fraccionarios que se acercan cada vez más entre sí, y que contienen entre ellas al número  $\sqrt{2}$ . Estas series son monótonas convergentes, ya que una es creciente y la otra decreciente, cada término de la decreciente es mayor que cualquiera de la creciente y la diferencia entre los términos de una y otra puede llegar a ser tan pequeña como se desee. Estas cortaduras en el campo de los números racionales definen unas series que tienen las mismas propiedades y pueden ser operadas como los números enteros y racionales, los cuales pueden ser definidos como subconjuntos de ellas. También puede

definirse axiomáticamente que las dos series que determinan el número real tienen un límite común (Dedekind).

Las series continuas deben incluir todos los números así definidos para que sean "compactas", propiedad que permite a su analogía geométrica asegurar que entre dos rectas existirá siempre un punto común, y que no se producirán vacíos.

Al definir la discontinuidad, dado que los números racionales (fraccionarios) no pueden tener un denominador superior a uno fijado previamente, no será posible construir las series que definen los números reales y por lo tanto deberemos acudir a la convención práctica ya utilizada en la teoría y práctica de la medida aproximada de sustituir el número real por uno de los miembros de las cortaduras.

Para definir y encontrar máximos debemos procurar siempre tomar un número de la serie por defecto y a poder ser con la máxima aproximación posible.

Mientras las series continuas son compactas, en las discontinuas no tiene sentido definir la propiedad de "ser compacto". Esto se obvia asimilando los números reales a aproximaciones racionales.

f) La continuidad, la discontinuidad y la medida. La matemática teórica cada vez que ha encontrado un problema de medida ha procedido a ampliar la serie de los números enteros, creando, para hacer frente a la divisibilidad, los números racionales y para hacer frente



a los problemas de los irracionales, ha creado los números reales. Con ello ha introducido el supuesto implícito de que cualquier medida es posible con los métodos e instrumentos de que se dispone.

Si este supuesto es eliminado y se parte del punto de vista de que historicamente se dispone de unos instrumentos y métodos de medida que permiten un límite de aproximación en las medidas que no se pueden rebasar, basta para expresar todas las medidas un campo numérico formado por conjuntos finitos de números racionales, que, con la adecuada elección de unidades, (haciendo uno a la menor medida que va a ser utilizada), pueden ser enteros.

La discontinuidad nace de una actitud pragmática frente a la medida y sus posibilidades reales.

g) Una cautela sobre resultados aproximados. En los resultados aproximados de operaciones en el campo de la discontinuidad no se puede aproximar más allá de la aproximación que defina la magnitud discontinua.

h) Discontinuidad y funciones analíticas. R.G.D.Allen (63) opina lo siguiente:

"Una función discontinua tal (motivada por saltos en los valores) tiene, evidentemente, muy poca utilidad desde el punto de vista del análisis matemático, ya que no es posible representarla por una simple fórmula analítica de la clase de las que corrientemente

(63) ALLEN, R.G.D. libro citado en nota 18, página 98.

se consideran en la investigación matemática."

En opinión del que suscribe, parece que es posible sugerir un uso de las funciones analíticas parecido al que se hace con la hipótesis de continuidad. Para ello hay que definir propiamente el dominio y recorrido de las variables. Por ejemplo si escribimos la ecuación de la recta:  $y = ax + b$ , podemos suponer que los valores de  $(y, x)$  están tomados del campo de los números reales, pero nada nos impide utilizar dicha función suponiendo que solamente está definida para valores de  $(y, x)$  tomados del campo de los enteros.

Quizá surgiría un inconveniente en el caso de definir la intersección de dos funciones, pero esto puede obviarse quizá definiéndola como los valores en que la diferencia entre los valores de las variables dependientes (si ambas funciones están definidas para una misma variable independiente) tienen un valor absoluto menor. Esta definición vale para el caso de la continuidad en que la intersección presenta una diferencia igual a cero.

Sin embargo la discontinuidad puede construir sus propios métodos. Al ser los conjuntos finitos valen otros procedimientos, y, como se verá, la función analítica puede no ser tan necesaria. Igualmente puede sugerirse la equivalencia entre un conjunto discontinuo y un vector, con lo cual puede inclinarse la matemática discontinua hacia otro tipo de algoritmos.

---

Capítulo 3.º—Los sistemas de medida  
como fundamento de la  
discontinuidad en economía.

"Qui numerare incipit, errare incipit"

transcrito por Oscar Morgenstern:

"On the acuracy of economic observations"

C A P I T U L O 3º  
=====

LOS SISTEMAS DE MEDIDA COMO FUNDAMENTO

DE LA DISCONTINUIDAD EN ECONOMIA.

ooooo

3 - a). Objeto de este capítulo. En el capítulo 1 se ha examinado como la concepción moderna de la continuidad fue surgiendo a través de un conjunto de problemas, de los cuales estamos interesados en destacar los creados por las dificultades de medidas exactas, que llevaron a la ampliación de la series de los números enteros, a la de los racionales y reales.

Se ha visto como las propiedades de los números reales servían para reflejar los problemas del movimiento. En este capítulo nos preguntamos si las propiedades de los números reales son las más adecuadas para reflejar las propiedades de las medidas económicas tal como se usan en la práctica de la industria y del comercio, en especial en microeconomía, o bien si es más conveniente considerar que las medidas usadas en economía pueden ser descritas por conjuntos discontinuos y por ello finitos tal como se han definido en el capítulo 2.

El problema de elegir uno u otro sistema centra la discusión de la continuidad con independencia del problema de la divisibilidad o indivisibilidad de los objetos, en este caso bienes de producción y productos, y lo traslada al campo de las medidas que vamos a utilizar para su descripción matemática.

b) El origen de los sistemas de medidas. Tanto los factores de la producción como los productos acostumbran a medirse en unidades de un sistema métrico previamente establecido. Estas unidades son convencionales y fueron fijadas, según parece, en gran parte para facilitar el tráfico económico.(64). Durante los siglos XVIII y XIX, la Física depuró y unificó estos sistemas de medida, fijando unas unidades fundamentales y otras derivadas. Aunque la unificación no fue completa quedaron sistemas fácilmente transformables unos en otros como el CGS y el Giorgi (65). Las unidades de tiempo, también fundamentales para la economía, fueron reformadas y establecidas en su actual estructura, salvo algunas modificaciones posteriores, por los romanos (66).

No parece aventurado pues afirmar que los sistemas y métodos de medida que se utilizan en las transacciones y cálculos económicos han sido fijados al margen de la ciencia económica, y que ésta

(64) Ver TURNBULL; H.W. "Los grandes matemáticos", CREDSA, Barcelona, 1968.

(65) Ver DAMPIER DAMPIER-WHETHAM, G.C. libro citado en nota 7, páginas 228-229, y ARIAS; Héctor y LASHERAS, Jose M<sup>a</sup>. "Tecnología mecánica y metrotecnica", Zaragoza, 1963, capítulo XLVI y ss.

(66) La idea del tiempo ha variado a través de la historia. Ver TOULMAIN, Stephen y GOODFIELD, June "El descubrimiento del tiempo", Editorial Paidós, Buenos Aires, 1968.

en opinión de Oscar Morgenstern, no ha demostrado demasiada diligencia en considerar los problemas peculiares que podían presentarse en sus medidas (67).

En economía también tienen gran importancia los conjuntos que no admitiendo la propiedad de la suma, sin embargo pueden ordenarse. El prototipo de estas magnitudes es la utilidad (68), aunque se examinarán otras en el transcurso de este ensayo.

Las medidas de orden presentan características especiales que se presentan en todos los procesos de elección.

c) Medir, contar y ordenar. Estas tres operaciones tienen por objeto comparar, atribuyéndole un número, el estado de un conjunto con el de otro que se toma como unidad o referencia. En el apartado anterior se ha examinado ya que existe, como referencia de las magnitudes que miden los factores de producción y los productos, un conjunto de unidades. Se examinará ahora la peculiaridad de cada una de estas tres operaciones.

La operación de contar consiste en atribuir a un conjunto un ~~conjunto~~ un número entero, con el cual pueda ponerse en correspondencia biunívoca (Ver Capítulo 2).

Hay una larga polémica filosófica en torno a los tipos de conjuntos que pueden ser contados y aquellos que sólo admiten la medida.

(67) Ver MORGENSTERN, Oskar "ON THE accuracy of economic observations" Princeton University Press, 2ª edición, 1963, pag. 7.

(68) Ver MEJUNDAR, Tapas "The measurement of utility"; Macmillan & Co. Ltd. Nueva York, 1966.

La operación de medir consiste en la atribución a una magnitud de un número racional o fraccionario.

En ambos casos es fundamental la definición de la unidad. Existe un punto de vista bastante extendido sobre las magnitudes económicas que pueden sólo ser objeto de la operación de contar.

Se acostumbra a afirmar que las magnitudes que están formadas por objetos que tienen "estructura", es decir, que están formados por partes no idénticas, y cuya división origina su destrucción, no pueden dividirse y por ello sólo pueden ser objeto de cuenta mediante números enteros (69).

En cambio aquellos objetos (factores de la producción o productos) que al dividirse conservan su "mismidad", que en economía se denominan con el nombre de homogéneos, pueden indistintamente ser contados y medidos, y son a los que propiamente se denomina como continuos, siéndoles aplicada generalmente la hipótesis de continuidad.

En el próximo apartado se volverá sobre esta distinción para mostrar como en muchos casos, pero no siempre, la "indivisibilidad" no es un obstáculo infranqueable, con un adecuado cambio de medidas, para que los números fraccionarios se apliquen también a los bienes "indivisibles".

(69) Ver PEARSON, Karl, "The grammar of science", Meridian Books Library, 1957 (edición final 1911), Capítulo VI.



Los conjuntos ordenados pueden también ser objeto de una medida numérica mediante una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y una serie ordenada de números. El siguiente ejemplo expone este hecho.

Si un conjunto de cinco personas son alineadas según su estatura, pueden igualmente describirse mediante la asignación sucesiva de letras del alfabeto (a, b, c, d, e) o bien ser descritas por un conjunto sucesivo de números ( $1^o$ ,  $2^o$ ,  $3^o$ ,  $4^o$ ,  $5^o$ ). En estricta lógica puede utilizarse tanto el conjunto (1, 2, 3, 4, 5) como cualquier transformación lineal del mismo (70). Con ello queremos significar que el conjunto de números que utilizamos para describir el orden es arbitrario. Para el caso comentado podrían utilizarse también estos: (101, 102, 103, 104, 105). Entre uno y otro conjunto existe una relación del tipo  $a \propto b$ . por esta razón puede decirse que vale un conjunto ordenado y sus transformaciones lineales.

d) Las medidas y la economía matemática. La economía es una ciencia fundamentalmente matemática, ya que muchas de sus magnitudes se expresan espontáneamente en forma de números. Tales son los precios y las cantidades objeto de transacciones. También son números las tasas de interés y las existencias de factores de producción y de productos.

Al examinar sumariamente el desarrollo histórico de la aplicación de cálculo a la ciencia económica (Capítulo 1) se ha obser-

(70) Ver respecto a este concepto el ensayo de ALCHIAN, Armen: "The meaning of utility measurement", American Economic Review, marzo 1953, incluido en "Readings in microeconomics" seleccionadas por Breit y Hochman, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1968.

vado que a causa de la enorme cantidad de observaciones necesarias para describir con suficiente amplitud un sistema microeconómico ha existido una tendencia muy grande al razonamiento algebraico, es decir, a suponer dados los datos del problema sin que se examine demasiado estrechamente su naturaleza. Es típico de la economía matemática el razonamiento de este tipo: "Dados unos factores de la producción  $X$ ,  $y$ ,  $z...$ ", o "dados unos bienes  $x$ ,  $y$  y una renta  $R...$ ".

El número de bienes representados algebraicamente pueden ser muy heterogéneos y su cantidad puede sobrepasar el millón. El control<sup>1</sup>/descriptivo y cuantitativo de dichos bienes es difícil y por esta causa una representación general y simbólica ha facilitado el planteamiento de los problemas.

Suponer la continuidad en tales casos no compromete a ningún tipo de verificación especial de la hipótesis y permite, mediante los poderosos y bien desarrollados instrumentos del cálculo diferencial e integral, formular un conjunto útil de leyes, solamente verificables como señala P. A. Samuelson "bajo condiciones ideales".(71)

Si avanzamos un paso más allá y, reconociendo previamente la validez histórica y la razón de este planteamiento, nos preguntamos qué representan las  $x$  y la  $y$  de los razonamientos algebraicos deberemos reconocer que son medidas en unidades concretas de bien

(71) Ver SAMUELSON, P. A., libro citado en nota 4, página 4.

nes concretos.

Con ello nos veremos en la necesidad de especificar las medidas que adoptamos y utilizaremos la matemática, no solamente como una herramienta lógica, sino también como un modo de describir y de aprehender el mundo.

Por ello, y bajo esta óptica de utilización de la matemática, toda investigación teórica debe comenzar por la especificación de las magnitudes a que se refiere y de las unidades que van a ser utilizadas para la medida de estas magnitudes.

e) Las medidas específicamente económicas. Han sido raros los intentos de crear un sistema de medidas económicas. Uno de ellos tiene ya más de cien años y fue realizado por W. Stanley Jevons. En este ensayo se utilizará el propuesto por José Castañeda Chornet, con algunas observaciones preliminares (72).

Una de las diferencias que separa a la microeconomía de la macroeconomía consiste en el sistema de unidades que utilizan. La macroeconomía utiliza cantidades agregadas, muestras, números índices y otras formas de cantidades que le permiten hacer frente, de un modo simplificado a los millones de variables y datos que presenta un sistema económico, reduciendo las magnitudes y reduciendo el número de observaciones. Las medidas principalmente macroeconómicas han merecido recientemente notables reflexiones (73).

(72) Ver CASTAÑEDA, José, libro citado en nota 20, lección 6ª.

(73) Ver MORGENSTERN, Oscar, libro citado en nota 67, y STONE, Richard, "The role of measurement in economics," Cambridge University Press, 1951.

En el campo microeconómico las medidas deben reflejar la posibilidad de máxima desagregación posible. Habrá tantos tipos de objetos como sea conveniente (Ver Capítulo 6) y siempre que exista duda se creará una nueva magnitud para describir un nuevo tipo de objeto. Con ello se alcanzarán sistemas muy grandes con varios millones de tipos de objetos implicados, que resultarán de difícil descripción y manejo. Sin embargo no podemos renunciar "a priori" a un sistema de unidades que pueda abarcarlos.

Nos preguntamos si entre los muchos tipos de elementos y objetos que forman parte de un sistema económico existen unas características comunes en las medidas que permitan construir un sistema (74).

Una respuesta que seguiremos aquí, se encuentra en las "Lecciones de Teoría Económica" de José Castañeda.

Castañeda divide las magnitudes en : cantidades físicas (Q) , medidas de dinero (D) y medidas de tiempo (T).

Las medidas de las cantidades físicas, establecidas dentro de otro dominio científico ( ver apartado b) se encuentran explícitamente establecidas en el sistema de precios.

Un precio, pongamos por ejemplo el del cobre, se expresa en pesas por Kilo, o en otra unidad determinada del sistema físico de medidas que es uniforme para todos los participantes en el sistema de cambio.

Por ello admitiremos que existe un sistema definido de unidades

(74) Ver para la construcción de esta idea DEBREU, G, libro citado en nota 44, páginas 32-37, capítulo 2º.

en las cuales se miden las mercancías que se intercambian, los factores de la producción, los recursos y los elementos patrimoniales.

$$U = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

que está implícita en el sistema de precios.

Trataremos sucesivamente los problemas que presentan este tipo de medidas físicas, para tratar ulteriormente las medidas en dinero y las medidas de tiempo.

f) Continuidad e indivisibilidad. Se ha señalado que la indivisibilidad se acostumbra a confundir con la discontinuidad. Si una bombilla de alumbrado es un tipo de bien que al dividirse se rompe, que pierde sus "estructura", parece que difícilmente puede describirse por un sistema de números continuos.

La misma propiedad puede ponerse en duda de numerosos bienes productos y factores. Un automóvil, un tractor, un arado, una <sup>fabricación de</sup> toria de plástico, son difícilmente divisibles.

Otros bienes: el agua, el cobre, la tierra de labor, el tiempo de trabajo son "homogéneos" y pueden ser en teoría perfectamente divisibles. y por lo tanto no hay ningún obstáculo en describir sus magnitudes en el campo de los números continuos.

Veamos que tanto en uno como en otro caso existe una duda razonable acerca de esta creencia.

Los objetos indivisibles, como la lámpara y el tractor, pue -

den con una adecuada elección de unidades, perder su carácter de "discontinuos" aun sin dejar de ser "indivisibles".

Examinemos el caso de la lámpara. Lo que desea un ingeniero al plantear una iluminación es un número de lúmenes por metro cúbico. Este número mide realmente el servicio de la lámpara y es evidente que existirán lámparas de diferente capacidad de iluminación, que por su relación con la medida de potencia eléctrica se miden en watios o kilowatios.

Igualmente un automóvil puede ser descrito por su número de asientos, potencia, consumo por cien kilometros, y otras características.

En ambos casos y en muchos otros un adecuado cambio de unidades (75) permite reducir la indivisibilidad a una medida que admite variaciones en más y en menos.

En el caso de las lámparas eléctricas el ingeniero puede, si le conviene, suponer cambios de un en un vatio y considerar la iluminación producida por lámparas de:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, . . . . . 1000... watios

Lo que realmente quiere decir la discontinuidad es que el cambio o salto en lámparas que puede utilizar como medida de iluminación va a ser estudiado en saltos finitos.

Por el contrario al admitir la continuidad, se admite que en el

(75) Ver ZAMORA, Francisco: "Tratado de Teoría Económica" 1ª edición 1953, Fondo de Cultura Económica - Mejico. páginas 406-408 y 450-455.

razonamiento económico los saltos de las unidades que se utilicen van a ser tan pequeños como se quiera y mas de lo que permiten los instrumentos de medida.

Aunque es posible, como se ha visto, con un cambio adecuado de unidades, reducir los números enteros de los objetos "indivisibles" a otros que permitan aumentar el margen de cambio en más o menos, no por ello deberemos admitir que estas cantidades en más o menos puedan o deban ser medidas en la vida diaria en millonésimas de millonésimas de las unidades normales de tráfico. Pues la continuidad permite manejar cantidades infinitamente inferiores a las millonésimas de millonésimas.

Esto parece tan irrazonable en el caso de los bienes "indivisibles" como en el caso de los bienes "divisibles" agua, cobre, tiempo de trabajo, o extensión de tierra cultivada (76).

¿Cuál sería el incremento de producción que resultaría de aumentar en una diezmillonésima de segundo el tiempo trabajado en una millonésima de hectárea de terreno?.

Este tipo de preguntas difícilmente tiene sentido económico alguno.

g) La conveniencia de medidas aproximadas. Por lo dicho en el apartado f) parece que es razonable admitir que el grado de aproximación necesario en la medida de las magnitudes económicas tiene un límite.

Conviene ahora examinar cuál puede ser este límite y fijar si es

(76) Ver bibliografía incluida en nota 24.

uniforme para todos los participantes en el sistema de cambio.

Existe sin lugar a dudas un límite que no puede ser alcanzado por los instrumentos de medida que en una época se utilizan para cada magnitud. Los instrumentos y métodos de medida se perfeccionan y por lo tanto este límite se fija históricamente. Admitir que no puede mejorarse es admitir el límite de la medida y por ello la discontinuidad en términos absolutos, lo cual no parece aconsejable.

Desde un punto de vista económico es necesario realizar otro tipo de consideración. Es evidente que el límite de aproximación que puede alcanzarse mediante los instrumentos de medida puede no ser rentable - desde un punto de vista económico. Ello es debido a que los instrumentos de medida han de considerarse como factores de producción. Las balanzas, los relojes, los amperímetros, etc., son elementos imprescindibles para la producción y los actos de medir y contar son actos de la función de producción que produce un coste. Si efectuamos el supuesto que, como más aproximada sea la medida más cara va a resultar, es evidente que aun dentro del campo de lo posible existen medidas antieconómicas. Es decir, el beneficio obtenido por una mayor aproximación se pierde por el mayor coste de la medida.

Este es quizá un buen argumento para la defensa de un límite en el grado de aproximación de las medidas, o sea de la discontinuidad, para las magnitudes económicas.

Debemos ahora preguntar si el grado de aproximación en las medidas debe ser el mismo para todo el mundo.



La respuesta, a nuestro juicio, es afirmativa y se encuentra en la práctica, muchas veces confirmada por la legislación, de una unidad monetaria mínima en las transacciones. En España esta unidad mínima también variable históricamente es ahora los diez céntimos de peseta. Todo el mundo acepta en España que no vale la pena discutir cantidades económicas cuyo valor sea inferior a esta cantidad. Por ello, como se verá con más extensión cuando se trate de las medidas de dinero (apartado k), el dinero es uno de los principales sostenes de la creación sistemática de discontinuidad en el sistema económico.

h) La aproximación en el campo de los números muy grandes. En microeconomía hay que enfrentarse con sistemas muy grandes que contienen varios millones de variables. Contar estas cantidades es una operación difícil a menudo expuesta a error. Puede verse esto suponiendo el tiempo y el esfuerzo que comportaría contar la siguiente cantidad:

324.587.129.127.745.982.354.359.218

por ello el error cometido en las cifras grandes es un hecho común. Esta es otra razón obvia por la cual las operaciones de contar y medir forman parte de las funciones de producción y no pueden considerarse gratuitas. Para obtener información sobre grandes números ha de existir tanto un conjunto de personas, como de instrumentos que se hallen afectos a la operación y su mayor precisión será producto de un mayor coste.

El coste y la dificultad de recoger información y de transmitirla a grandes velocidades por una parte, debe ser comparado con el posible rendimiento de poseer esta información. (Ver capítulo 6).

Muchas veces las cantidades grandes son manejadas sin una suficiente especificación del grado de fiabilidad de las medidas que representan. Citaremos como ejemplo un caso expuesto por Oscar Morgenstern en su libro "On the accuracy of economic observations".

"En el testimonio de 16 de junio de 1949 en las audiencias ante el comité Conjunto del Congreso para la Energía Atómica, se reveló con gran consternación del público y del Comité, que el peso de todo el oro de Fort Knox solamente podía ser determinado con un error de alrededor de 20.000.000 de dólares, a pesar de ello los datos contables del 30 de junio de 1960 dieron una existencia de 12.483.415.000 dólares". (77)

En el citado libro de Morgenstern se argumenta repetidamente en favor de acompañar siempre a las magnitudes económicas la especificación de su grado de aproximación..

Admitimos, pues, que existen medidas muy grandes en los sistemas económicos, cuya apreciación exacta es a veces difícil.

i) Consecuencias de la adopción de un sistema métrico decimal.

Si según las convenciones propuestas anteriormente decidimos que las medidas económicas de factores de la producción y de productos

(77) Ver MORGENSTERN, Oskar, libro citado en nota 67, página 45.

deben tomarse de un conjunto finito de números racionales, podemos determinar éstos dentro de un sistema métrico decimal, si lo creemos conveniente.

Esta conveniencia nace de un hecho práctico y observable. La adopción de un sistema métrico con base en el número diez, con múltiplos y submúltiplos expresados en esta misma base, confiere a los números decimales una probabilidad mucho mayor de ser utilizados como medidas de la que tienen otros números del campo de los racionales.

Con ello nace otro tipo de inconmensurables, ya que no siempre es posible transformar cualquier número racional en un número con denominador formado por una potencia entera, positiva o negativa, de diez.

Las transformaciones de números racionales en números decimales cuando no son exactas, generan fracciones decimales periódicas puras o mixtas (78), las cuales deben ser tomadas por aproximación según reglas análogas a las establecidas para los números reales inconmensurables (Ver Capítulo 2 , apartado e ). Igual que, en el caso de los números reales inconmensurables, para que exista discontinuidad es necesario que el grado de aproximación sea finito y definido, y no mayor que el máximo grado de aproximación que permitan los instrumen-

(78) Ver MATAIX, Carlos: "Aritmética general y mercantil", 3ª edición, Editorial Dossat, S.A. Capítulo II, artículo II.



culo económico. Especialmente puede también utilizarse un axioma de discontinuidad restringido a las medidas decimales, en cuyo caso sólo se utilizarán como medida los números racionales que tengan como denominador una potencia positiva o negativa de diez.

La admisión de este axioma puede ser considerada como otra respuesta práctica al problema de la medida. Es la respuesta dada por la práctica de los negocios económicos de cada día. Dice Pedro Puig Adam:

"La noción de inconmensurabilidad es puramente teórica. En la práctica, todas las medidas experimentales son números racionales aproximados de los que se conoce tan sólo un límite de error cuya pequeñez caracteriza la precisión de la medida."(80)

Y podríamos añadir la siguiente cita de Ángel Alcaide Inchausti:

"El autor de estas lecciones (D. Angel Alcaide), por su parte quiere insistir en las precauciones que deben tomarse ante cualquier razonamiento económico en el que se utilice el instrumental matemático. No es solamente que las mediciones de cualquier magnitud exijan tomar valores discretos a todas las variables observadas debido a la tosquedad de los medios empleados para medir (pesos o valores monetarios, por ejemplo) sino que además, los modelos matemáticos de la economía no suelen incluir gran número de variables que influyen en el comportamiento de la magnitud que se quiere explicar, pero que todas, conjuntamente,

(80) PUIG ADAM, Pedro: "Curso de Geometría métrica", Tomo I, Fundamentos. 3ª edición, Madrid, 1952, lección 18, página 105.

, sí constituyen muchas veces una causa decisiva de aquel comportamiento".(81)

Una vez admitida axiomáticamente la discontinuidad,- y éste es un privilegio que puede adoptarse siempre en matemáticas, ya que esta ciencia comienza definiendo sus propios objetos -, podemos examinar los métodos de utilizarlo y las consecuencias a que conduce. Sólo si las consecuencias son contrarias a los hechos observados deberemos concluir que este axioma, aunque formalmente válido, debe ser rechazado, como no conveniente a la teoría económica (82).

Del mismo modo que se ha explorado una teoría económica fundada en la continuidad, es posible, y quizá fructífero, recorrer los mismos caminos con la discontinuidad. Sólo cuando esto esté hecho y se pueda comparar el cuerpo teórico resultante de ambos sistemas se podrá examinar el alcance de uno y otro sistema. Y este camino sólo está comenzado, por lo tanto cualquier conclusión a que se llegue en la visión continuidad-discontinuidad debe ser aún forzosamente provisional. El camino de la discontinuidad, si se llega a recorrer algún día, tiene, desde un principio la propiedad de ser largo.

k) El dinero como medio de medida económica. El dinero ejerce un gran papel en la teoría de la medida en el campo de la economía, tanto a nivel "macro" como a nivel "micro".

El dinero es usado como una medida de equivalencia común de

(81) Ver ALCAIDE INCHAUSTI, Angel: "Lecciones de Matemática moderna para economistas", Copigraf, Madrid, 1966.

(82) Sobre la posibilidad de comprobar las teorías mediante las deducciones derivadas de ellas, ver MEJUMDAR, Tapas, libro citado en nota 68.

todos los bienes, productos y factores de la producción y en él vienen medidos los precios. Por ello puede desempeñar otras funciones.

En el campo de las medidas macroeconómicas el dinero sirve para resolver, siempre que no sea posible hacerlo de otra forma, el problema de las medidas agregadas. Es bien patente el interés del enfoque macroeconómico por las medidas agregadas formadas por sumas de diferentes elementos. Estos pueden tener un mayor o menor grado de homogeneidad. Tomemos por ejemplo las diferentes clases de trabajo. Para dar una medida común puede utilizarse una hora de trabajo tipo de obrero especializado y calcular equivalentes para otros tipos de trabajo no especializado, profesional, de dirección, etc. De este modo puede calcularse el número de horas-tipo que cuesta una tarea.

Cuando este tipo de transformación homogénea no es posible, sin embargo, las magnitudes agregadas se calculan en dinero, transformando previamente las cantidades físicas en cantidades monetarias. Tanto el consumo, como la inversión nacional, sirva de ejemplo, se estiman en dinero y no en los millones de tipos de bienes que incluyen ambos conjuntos (83).

Aun en el caso, como el trabajo, de expresar las magnitudes agregadas en unidades no dinerarias, el precio (medido en dinero) es un buen coeficiente de transformación para indicar el peso relativo que cada tipo de bien, factor o producto, debe tener en el

(83) Ver SEGURA, libro citado en nota 21, 1.2 (2) y pág. 54

agregado total.

Por ello quizá se puede sugerir que la macroeconomía no sería posible sin la microeconomía y que las magnitudes macroeconómicas para su formación necesitan de un sistema de precios que permita la agregación (84).

En microeconomía el dinero también tiene un papel importante que desarrollar, ya sugerido en el apartado g) y que ahora será comentado con mayor extensión.

Como ya se ha señalado (apartado e), Castañeda considera el dinero (D) como una de las medidas fundamentales en el sistema microeconómico de medidas. ¿Podemos considerar el dinero como una magnitud medida continua o discontinuamente?

El dinero ha sido considerado por varios autores, entre ellos J. R. Hicks (85) como el prototipo de bien continuamente divisible. Realmente si con ello quiere decirse que es el bien más divisible de un sistema económico no hay obstáculo en admitirlo. Si con ello se quiere decir que podemos tomar cualquier cantidad de dinero, por arbitrariamente pequeña que sea ( por ejemplo, una cienmillonésima de céntimo) como una cantidad que tenga una probabilidad elevada de ser utilizada practicamente en las transacciones económicas, parece que más bien debería negarse al dinero este grado de divisibilidad.

(84) Puede sugerirse la conveniencia de coordinar la terminología entre "micro" y "macro". A menudo se habla de modelos con dos factores y un solo producto. Para coordinar más adecuadamente la terminología sería más conveniente afirmar que se trata de modelos con los factores medidos en dos unidades homogéneas y modelos medidos con una sola unidad para el producto. Los ejemplos de esta discordancia terminológica son numerosos.

(85) Ver HICKS, J. R., libro citado en nota 44, páginas 53 y 54.



Varios sistemas monetarios establecen reglas legales que fijan el grado de aproximación de cantidades de dinero, y en otros casos, cuando estas reglas legales no existen, existe la práctica consuetudinaria de aceptar siempre unidades mínimas de dinero. En España actualmente acostumbran a ser los diez céntimos de peseta. Hay que reconocer que estos límites varían, seguramente, con la cantidad de dinero que existe en el sistema, pero historicamente siempre, o casi siempre, si se quiere matizar, han existido.

Por ello las cantidades de dinero practicamente operatorias crecen de diez en diez céntimos, y esta magnitud, cuya cantidad tal es finita, se enmarca dentro de la definición dada de discontinuidad.

Pero aún admitiendo la discontinuidad es conveniente reflexionar acerca del significado de la existencia de una unidad mínima de dinero aceptable en las transacciones, como pueden ser actualmente los diez céntimos.

La interpretación que se sugiere es la siguiente: Los bienes, productos, factores de producción y elementos patrimoniales en muy pequeñas cantidades pierden su valor, o llegan a tener un valor tan pequeño que no es necesario tenerlo en cuenta.

La cantidad de un bien cuyo valor es practicamente despreciable es la cantidad de tal bien cuyo valor sea equivalente a diez céntimos, o en su caso, a la unidad mínima de dinero que está vigente en el sistema.

Si creemos conveniente considerar esta cantidad como el límite mínimo común de divisibilidad para cualquier bien, producto, factor de producción o elemento patrimonial, tendremos una manera uniforme, fundada en el dinero, de organizar la discontinuidad.

Tomando esta unidad mínima común de cada uno de los bienes económicos como unidad indivisible podemos construir un sistema discontinuo. Sin embargo esto no es del todo aconsejable, ya que la variación de los precios convertiría a la unidad mínima en variable. En opinión del autor, aunque los precios tienen mucha importancia para determinar el límite inferior del valor de los bienes económicos, éste se halla principalmente determinado por condiciones tecnológicas.

1) Un test para la lógica de elección. La lógica de la elección marginalista fundada en la continuidad podría aplicarse fácilmente si todos los bienes pudieran medirse en unidades equivalentes a una cantidad monetaria fija y mínima.

Esta unidad ha sido considerada a veces como la peseta, pero no existe ningún inconveniente en considerarla menor e igual a diez céntimos de peseta.

Para practicar la lógica de elección basada en la igualdad de las productividades marginales, bastaría con elegir cantidades arbitrarias de los factores de producción necesarios para la obtención del producto. Se debería después examinar la productividad marginal de cada uno de ellos (el margen está perfectamente definido y es igual a la cantidad que se obtiene con diez céntimos de peseta, sien

do además de igual valor monetario para todos los factores). Se hallarían tres tipos de factores, aquéllos que aportan un incremento de producto igual a diez céntimos, cuya cantidad no debería ser modificada, aquéllos que aportarían una cantidad de producto cuyo valor sería superior a diez céntimos, que, supuesta la productividad marginal decreciente, deberían aumentarse de cantidad hasta que su productividad marginal fuera de diez céntimos. Un tercer tipo de factores tendrían una productividad marginal inferior a diez céntimos. La cantidad de estos debería ser disminuida hasta que fuera la cantidad de dinero (10 céntimos) común a todos los factores (86).

Cuando la productividad marginal de cada factor, medida en valor monetario fuera de diez céntimos se habría alcanzado el equilibrio.

Con la descripción de este proceso podemos observar que generalmente, suponiendo la discontinuidad, la lógica de la elección marginalista sería practicable.

Lo que parece ser un obstáculo insalvable en la aplicación de este tipo de lógica es que en muchos casos no es posible con seguir cantidades de factores equivalentes a una misma unidad monetaria para todos y cada uno de los factores.

Aunque podamos obtener (Ver apartado f) cierto grado de con

(86) Se ha adoptado el supuesto de que las cantidades de factores utilizadas son independientes de las que se utilicen de otros factores.

tinuidad en la medida de bienes indivisibles, con un cambio adecuado de medidas, es muy difícil que para todos los bienes se lleguen a obtener de forma operativa cantidades equivalentes a diez céntimos. Esto es tan cierto de los bienes "indivisibles" como pueden ser las lámparas eléctricas y los automóviles mencionados en el apartado f), como del uranio, el torio, el radio y el wolframio.

La que parece ser una dificultad principal para aplicar el método lógico de la ley de igualdad de utilidades marginales ponderadas en la práctica es un modo de razonar común que asigna a cada tipo de bien, producto, factor de producción, o elemento patrimonial, una cantidad mínima de transacción y cálculo en cantidades físicas, de naturaleza tecnológica y que no tiene para cada uno de los bienes el mismo valor.

Desde un punto de vista matemático esto significa que los saltos y unidades mínimas de diferentes magnitudes económicas se fijan independientemente de su valor en dinero y que no puede esperarse que su valor en dinero coincida: en unos será de diez céntimos de peseta, en otros de peseta y en otros de cien pesetas.

Por ello, aunque su valor teórico es indudable, no cabe esperar que la lógica de la elección fundada en las igualdades marginales se aplique y cumpla en la vida real. Veremos en el capítulo siguiente que es posible otra lógica, no tan perfecta

desde un punto de vista teórico, pero aplicable desde un punto de vista práctico, que tenga en cuenta esta característica especial de la discontinuidad, el crecer cada magnitud en cantidades monetarias no equivalentes.

m) El tiempo y la discontinuidad. José Castañeda señala como tercera unidad fundamental, en el marco de la microeconomía, al tiempo (T).

El tiempo ha sido una de las magnitudes prototipo de continuidad. El tiempo, lógicamente, es continuamente divisible. Sin embargo, como señalan Kemeny, Snell y Thomson, "toda medida de tiempo es discontinua" (87).

Con ello quiere significarse que aun los mejores relojes tienen límite en la apreciación de unidades de tiempo cada vez más pequeñas.

Este hecho relevante para la física, lo es aún más para la economía, que utiliza medidas de tiempo discontinuas de gran amplitud: un día, una semana, un mes, un trimestre, un año. Raramente es necesario utilizar unidades de medida inferiores al minuto (88).

En microeconomía las medidas de tiempo introducidas por Al

(87) KEMENY, J.G., SNELL, J.L. y THOMSON, G.L. "Introducción to finite mathematics". La expresión ha sido tomada de la cita de TINTNER, Gerhard: "Methodology of mathematical economics and econometrics", The University of Chicago Press, 1968, página 2.

(88) Para algunas reacciones químicas incluidas en funciones de producción el tiempo es menor, pero esto tiene poco interés económico. Del mismo modo se pueden utilizar cantidades físicas de valor menor de diez céntimos. No se afirma su irrelevancia técnica, solo su irrelevancia económica

fred Marshall resultan bastante vagas. Ni el corto ni el largo plazo están debidamente definidos en su duración y por ello es difícil introducir en microeconomía una contrastación empírica fundada en la contabilidad. (88 bis)

n) El sistema discontinuo de medidas utilizadas en la contabilidad de empresas. Un posible test de las afirmaciones realizadas en este capítulo sobre la discontinuidad en las medidas puede realizarse a través del examen de las medidas que se usan en las contabilidades industriales y de almacén de las empresas. Si en ellas se constata, como ha podido hacerlo el autor en su vida profesional, que el sistema de unidades utilizado es discontinuo quedará probado en principio el uso de la discontinuidad en la empresa.

Ya se ha observado que el uso y práctica común de un sistema de medidas en teoría microeconómica y teoría de la empresa, parece ser un presupuesto básico para que aquella pueda ser verificada en un marco contable.

ooooo

(88 bis) Para una definición estrictamente discontinua del tiempo, este debería tener principio y fin. Una definición aproximada se obtiene si se elige un principio y fin arbitrario. Otro problema interesante es el de la "irreversibilidad" del tiempo, ver a este respecto WIENER, Norbert "CYBERNETICS" The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2ª edición 1961, Capítulo I. Fijando una unidad indivisible, el tiempo solo va de "atras hacia adelante", lo cual no ocurre con el espacio. También existe en economía el problema de la definición de "simultaneidad", aunque no sea la luz, sino una información que consta de números, la que transmita el mensaje. En general en economía puede decirse que el mensaje se transmite con suficiente rapidez para que el sistema en el periodo de tiempo que dura la transmisión no haya cambiado sustancialmente.

**Capítulo 4.º—Máximos bajo hipótesis  
de discontinuidad.—Appli-  
cación al cálculo de la téc-  
nica de producción óptima.**

"Cuando las diferencias son finitas todas las cuestiones importantes, como veremos más adelante, pueden decidirse por la acción de contar, de manera que es fácil saber si estamos en lo cierto o no. En cambio, si tomamos en cuenta cambios continuos a menudo tendríamos que comparar infinitésimos entre sí, o considerar lo que obtendríamos al sumar un infinito número de infinitésimos, cuestiones nada fáciles de dilucidar".

W. Ross Asbhy:

"Introducción a la cibernática"



C A P I T U L O    4º  
=====

MAXIMOS BAJO LA HIPOTESIS DE DISCONTINUIDAD.

APLICACION AL CALCULO DE LA TECNICA DE PRO-  
DUCCION OPTIMA.

ooooo

3.- a) La técnica operatoria de la discontinuidad. La técnica de operar de la discontinuidad, contrariamente a la de la continuidad (ver Cap. 1º-c) consiste en separar el continuo (ya sea numérico, espacial, temporal o de otro tipo) cubriéndole de un conjunto de elementos, suficientemente próximos, equidistantes o no, (sean números, líneas, planos, instantes, etc), de modo que los resultados logrados con el conjunto discontinuo se consideren suficientemente aproximados para sustituir los logrados con los métodos operatorios del continuo. (89)

Para el caso de las magnitudes económicas que intervienen en la función de producción, hemos visto en el Capítulo 3 que las con-

(89) Ver nota 32, donde se transcribe la descripción de ZIENKIEWICH, O.C. y CHEUNG, Y.K. del método discontinuo.

secuencias de adoptar sistemas de medida y convenciones generales sobre el grado de aproximación conveniente para el tráfico económico, significaban precisamente crear las condiciones para la aplicación de este método. En la práctica económica las medidas de los factores de la producción y de los productos no son tomadas del conjunto de los números reales (continuo), sino de otro más restringido (discontinuo).

Examinaremos ahora si es posible sugerir unas líneas en que pueda desarrollarse un método, fundado en esta hipótesis previa de discontinuidad, para encontrar máximos, sugiriendo su posible aplicación al caso de la función de producción.

b) La argumentación matemática sobre la que se funda el método discontinuo de calcular máximos. Una propiedad de los conjuntos finitos completamente ordenados es que por lo menos tienen un máximo. (90) Sea un conjunto finito de números fraccionarios (rationales):

$$A_0 = (7, 2/3, 9, 21, 1/99, 18)$$

Este conjunto no está ordenado. Para proceder a ordenarlos utilizaremos la propiedad de "ser mayor que". Una vez ordenado el conjunto anterior quedaría así:

$$A_1 = (21, 18, 9, 7, 2/3, 1/99)$$

El conjunto tiene un máximo en 21 y un mínimo en 1/99.

La segunda parte del argumento consiste en observar que un

(90) Ver RIOS, Sixto, nota 3.

conjunto que contenga sus extremos (91), como por ejemplo el intervalo  $(2 \dots 1)$  de los números reales también tiene una propiedad análoga.

Pero existe una diferencia fundamental: Mientras el conjunto

$$R = (2 \dots 1)$$

tiene entre el número 2 y el número 1 infinitos elementos, el conjunto antes citado:

$$A_1 = (21, 18, 9, 7, 2/3, 1/99)$$

tiene un número finito. Ello nos permite dos cosas: 1º) especificar todos sus elementos, 2º) construir el orden paso a paso hasta completarlo. Esto no es posible si el conjunto es infinito.

Estas propiedades pueden examinarse tomando de nuevo el conjunto de números racionales antes transcrito:

$$A_0 = (7, 2/3, 9, 21, 1/99, 18)$$

Para ordenar totalmente este conjunto podemos comenzar aleatoriamente por dos elementos cualesquiera:

$$(7, 2/3)$$

incluir después el siguiente:

$$(9, 7, 2/3)$$

(91) La definición de conjunto abierto y cerrado, puede verse en LANCASTER, Kelvin "Mathematical Economics" Macmillan, Nueva York, 1968, páginas 220 y 221. El infinito del conjunto  $R$  será alef cero, si está formado por un conjunto denso de números racionales, y alef 1, o potencia del continuo, si está formado por números reales. Para la definición de potencia del continuo ver KURATOWSKI, Kazimierz, libro citado en nota 59. No se ha creído conveniente, por no ser necesario, mencionarlo en el texto del ensayo.

y a continuación el cuarto:

(21, 9, 7, 2/3)

y posteriormente los dos siguientes:

(21, 18, 9, 7, 2/3, 1/99)

El método, aunque lógicamente correcto, puede resultar muy laborioso cuando el conjunto tenga un número muy grande de elementos. Es conveniente entonces buscar sistemas de convergencia rápida hacia el valor máximo, que no obliguen a examinar los elementos uno a uno.

Pero el principio lógico parece válido. Si el número de elementos es finito el orden puede establecerse paso a paso.

Establecido este principio general de los conjuntos discontinuos podemos examinar la segunda etapa del razonamiento.

En muchas aplicaciones prácticas estamos interesados no en ordenar este conjunto y hallar el máximo, sino en encontrar cuál es la cantidad asociada al valor máximo en otro conjunto que tiene, con el que está siendo ordenado, una correspondencia uno a uno. Para exponer con algún ejemplo el significado de este problema, supongamos que entre el conjunto  $A_0$  y otro conjunto B, existe la siguiente correspondencia biunívoca (aplicación):

$$\begin{array}{cccccc} A_0 = ( & 7, & 2/3, & 9, & 21, & 1/99, & 18) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B = ( & 72, & 30, & 75, & 60, & 89, & 58) \end{array}$$

En vez de encontrar directamente el máximo de  $A_0$ , podemos es-

tar interesados en identificar el número o elemento que le corresponde en la aplicación. En este caso siendo 21 el máximo del conjunto  $A_0$ , el número que deseamos identificar es su correspondiente en B, es decir 60, que denominaremos óptimo.

En el lenguaje clásico del cálculo diferencial diríamos que estamos hallando el máximo de la función  $A_0 = f(B)$ . (92)

Es conveniente ver cuál es el procedimiento seguido por el cálculo diferencial para resolver el mismo problema:

El cálculo diferencial comienza por ordenar (o suponer ordenado) el conjunto B, en vez del conjunto A.

$$B = (30, 58, 60, 72, 75, 89)$$

y estable posteriormente la aplicación con el conjunto  $A_0$ :

$$\begin{array}{cccccc} B = (30, & 58, & 60, & 72, & 75, & 89) \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A'_0 = (2/3 & 18, & 21, & 9, & 7, & 1/99) \end{array}$$

y procede a continuación a examinar las razones de crecimiento de la serie  $A'_0$ , llegando a determinar el valor máximo cuando se anula la razón de crecimiento, para ello es imprescindible suponer que la serie es continua, ya que de no serlo, no tienen sentido ~~aficientes~~ las razones de crecimiento. No es absolutamente necesario suponer la función  $A_0 = f(B)$  analítica, aunque los métodos desarrollados casi siempre la suponen de este tipo: (93)

(92) Ver ALLEN, R.D.G. libro citado en nota 18, capítulos II y VIII

(93) Ver CHIANG, Alpha C. "Fundamental methods of mathematical economics", McGraw-Hill, Company, 1967, capítulos 11 y 12.

En cambio en el caso de discontinuidad la función no tiene ninguna necesidad de ser analítica. Quizá esto explica la poca inclinación que existe en la práctica industrial de calcular funciones analíticas de producción.

Desde un ángulo práctico puede considerarse ventajoso un método que no incluya en su desarrollo la necesidad de calcular funciones analíticas, ya que para hacerlo es necesario una cultura matemática elevada.

Para poder emprender el examen de los caminos que son posibles para aplicar el método expuesto a la función de producción, es conveniente antes introducir una noción de la representación vectorial.

(94) Llamaremos vector discontinuo a un conjunto finito de números racionales, situados de modo que el orden tenga un sentido de clasificación. Así un vector discontinuo será, por ejemplo, el siguiente:

$$V_n = (0, 0, 3, 7, 0, 20, 1, 0, 17)$$

Representaremos este vector por una letra mayúscula con un subíndice. Los elementos del vector, cuando la representación sea algébrica, serán representados por letras minúsculas. La cantidad que ocupe el primer, segundo, tercer, etc. lugar representará siempre el mismo tipo de factor: tierra, trabajo, semillas, etc.

No existe ningún inconveniente en suponer que las aplicaciones biunívocas utilizadas en esta sección sean entre vectores o entre magnitudes numéricas y vectores:

- (94) Ver ALLEN, R.G.D.: "Economía matemática", Madrid, Aguilar, 1965, capítulos X-XVIII y Apéndice B. La definición dada en el texto no coincide totalmente con la común en matemáticas, aunque, como se verá, los vectores discontinuos gozan de bastantes propiedades corrientes entre los vectores.

c) El método de la discontinuidad para el caso de una función de producción con dos factores y un producto. El problema que deseamos examinar es, en terminos algébricos, el siguiente: Un empresario dispone de dos factores de la producción ( $v_1, v_2$ ) en cantidades finitas, que, para un ejemplo simple, supondremos que son ( $v_1 = 7$  unidades) y ( $v_2 = 4$  unidades). Desea producir con ellos un bien  $z$  y su objetivo es averiguar cuales son las mejores combinaciones de  $v_1$  y  $v_2$  para producir distintas cantidades de  $z$ , que está también medida en unidades discontinuas ( $z = 1, 2, 3, \dots$ ).

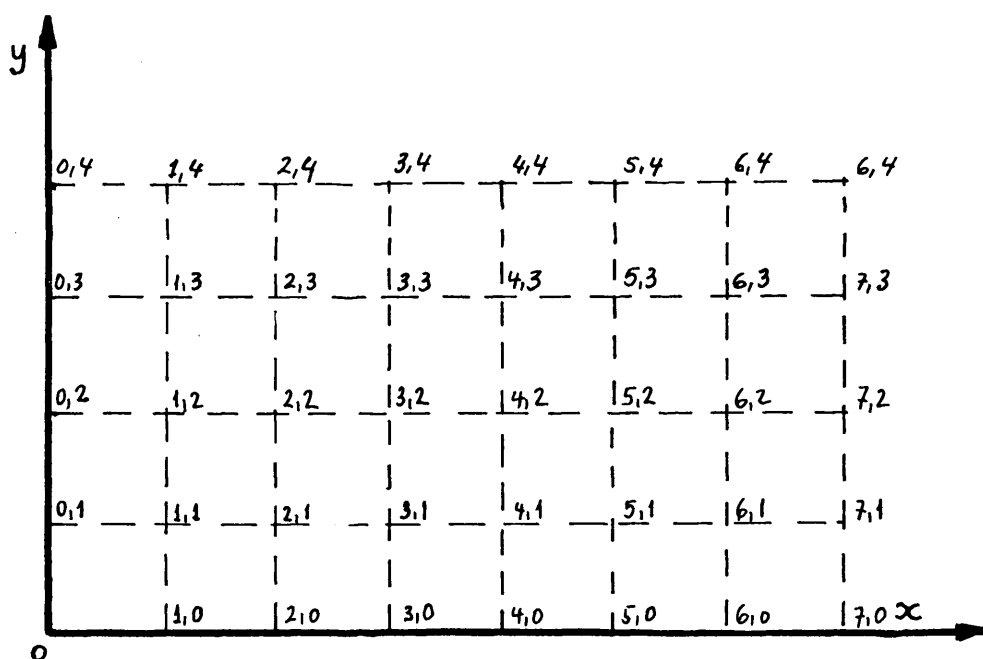
Las magnitudes se miden en unidades indivisibles como las explicadas en el capítulo 3. Así dispondrá de:

$$v_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \text{ unidades}$$

$$v_2 = (1, 2, 3, 4) \text{ unidades.}$$

Las combinaciones productivas serán las que se señalan en el siguiente gráfico, (número 2.)

Gráfico nº 2



Los pares de conjuntos de factores de la producción  $v_1$  y  $v_2$  que deberán examinarse son los incluidos en la siguiente tabla:

$\underline{v_1 v_2}$	$\underline{v_1 v_2}$	$\underline{v_1 v_2}$	$\underline{v_1 v_2}$	$\underline{v_1 v_2}$
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,1	1,1	2,1	3,1	4,1
0,2	1,2	2,2	3,2	4,2
0,3	1,3	2,3	3,3	4,3
0,4	1,4	2,4	3,4	4,4
0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
0,6	1,6	2,6	3,6	4,6
0,7	1,7	2,7	3,7	4,7

El examen de la tabla anterior consistirá en asociar, después de un experimento, a cada uno de los conjuntos de factores la cantidad de producto obtenida. Para ello adoptaremos la notación vectorial descrita al final del apartado b). Así por ejemplo llamaremos  $V_2$  al conjunto (0, 1) y  $V_{31}$  al conjunto (3,6). Hay que notar la ventaja que representa esta notación cuando el número de factores es muy grande, ya que en este caso con un símbolo y un subíndice podemos abreviar la expresión de una combinación que puede contener millones de elementos.

Quizá puede resultar conveniente denominar a este vector, vector de producción. Del mismo modo cuando el número de productos sea superior a uno, podremos crear un vector de los productos, que expresará la cantidad de cada uno de ellos utilizada.



Si suponemos realizado el experimento y conocemos ya la cantidad de producto que va asociada a cada vector de producción, podemos establecer una correspondencia análoga a la que, en nuestro ejemplo hipotético, se establece en la siguiente tabla. (Los vectores de producción representan la combinación que se halla en la misma fila y columna de la anterior tabla): (95)

	$V_9 \leftrightarrow 17$	$V_{17} \leftrightarrow 19$	$V_{25} \leftrightarrow 21$	$V_{33} \leftrightarrow 21$
$V_2 \leftrightarrow 0$	$V_{10} \leftrightarrow 15$	$V_{18} \leftrightarrow 17$	$V_{26} \leftrightarrow 19$	$V_{34} \leftrightarrow 19$
$V_3 \leftrightarrow 0$	$V_{11} \leftrightarrow 9$	$V_{19} \leftrightarrow 15$	$V_{27} \leftrightarrow 17$	$V_{35} \leftrightarrow 17$
$V_4 \leftrightarrow 0$	$V_{12} \leftrightarrow 7$	$V_{20} \leftrightarrow 13$	$V_{28} \leftrightarrow 15$	$V_{36} \leftrightarrow 17$
$V_5 \leftrightarrow 0$	$V_{13} \leftrightarrow 5$	$V_{21} \leftrightarrow 9$	$V_{29} \leftrightarrow 13$	$V_{37} \leftrightarrow 15$
$V_6 \leftrightarrow 0$	$V_{14} \leftrightarrow 5$	$V_{22} \leftrightarrow 7$	$V_{30} \leftrightarrow 11$	$V_{38} \leftrightarrow 13$
$V_7 \leftrightarrow 0$	$V_{15} \leftrightarrow 5$	$V_{23} \leftrightarrow 7$	$V_{31} \leftrightarrow 9$	$V_{39} \leftrightarrow 11$
$V_8 \leftrightarrow 0$	$V_{16} \leftrightarrow 5$	$V_{24} \leftrightarrow 7$	$V_{32} \leftrightarrow 9$	$V_{40} \leftrightarrow 11$

Una vez obtenida esta tabla el procedimiento a seguir difiere en el caso de continuidad y de discontinuidad. En el primer caso deberán examinarse algunos, aunque no necesariamente todos, las aplicaciones anteriores con objeto de determinar si es posible, por los métodos estadísticos conocidos, ajustar una función analítica. Si se halla esta función analítica se dispondrá de una información exhaustiva acerca del comportamiento de la función de producción

(95) La tabla transcrita en esta página tiene bastante analogía con las tablas utilizadas por FRISCH, Ragnar, libro citado en nota 15, páginas 49, 50, 51 y 52, y por FERGUSON, C.E. libro citado en nota 22, página 63, para describir los datos empíricos de la función de producción. En la página 51 del libro de FRISCH, cuadro 5a.11, puede comprobarse la dificultad de describir los conjuntos de producción cuando el número de factores crece, lo cual se facilita con notación vectorial.

porque al ser la función continua permitirá conocer cuál es la cantidad de producto que puede atribuirse a las infinitas combinaciones de factores incluidas en el campo de variación de las variables.

Cabe preguntarse si cabe esperar lícitamente en todos los casos encontrar funciones analíticas que se ajusten adecuadamente a los datos conocidos.

Existen algunas presunciones de que esta existencia de funciones analíticas puede resultar problemática para el caso de funciones de producción auténticamente "microeconómicas" en las cuales se utilizarán bienes no continuos, con "estructura", y en las cuales pueden incluirse millones de factores de la producción. Otra cuestión interesante estriba en que la producción es un proceso del cual los economistas solamente están interesados en conocer las cantidades de factores y de productos usados, y muchas veces incluyen otras magnitudes (almacenamiento, administración, comedores de empleados) no estrictamente técnicas.

Donde mayor éxito han tenido las funciones de producción ha sido en el estudio de unas relaciones estratégicas de producción, entre factores muy concretos y muy influyentes (como la tierra y el trabajo) con el supuesto de constancia o adaptación de los demás factores. Este es el caso del ejemplo de Von Thünen y de otros ejemplos citados por Ragnar Frisch en el libro reseñado en la nota 15.

Otro campo donde la función de producción ha podido ser estimada ha sido el macroeconómico. Por ello podemos decir que existe mayor probabilidad de estimar funciones de producción, cuando eligiendo factores de la producción estratégicos o bien agregando los factores para medirlos en unidades homogéneas, se consiga reducir drásticamente el número de factores a considerar. Pero si tenemos que incluir en la función analítica las variaciones de cada uno de los factores, por los cuales se paga un precio independiente, tanto la posibilidad de recoger la información, como la posibilidad de estimar la función, es problemática.

Alternativamente es posible seguir por el método de la discontinuidad. En posesión ya de la información contenida en la tabla de la página 9, es posible clasificar los vectores de producción en clases de equivalencia, o sea en conjuntos que contengan los vectores que producen la misma cantidad de producto. Podemos observar que este concepto es equivalente al de curva de isoproducto en el caso de continuidad (curva de indiferencia de producción). Esta clasificación está contenida en la siguiente tabla:

(Ver la tabla en la página siguiente).

<u>Cantidad de producto</u>	<u>Familia de vectores que pueden producirlo.</u>
0	$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$
5	$(v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16})$
7	$(v_{12}, v_{22}, v_{23}, v_{24})$
9	$(v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{32})$
11	$(v_{30}, v_{40})$
13	$(v_{20}, v_{29}, v_{38})$
15	$(v_{10}, v_{19}, v_{28}, v_{37})$
17	$(v_9, v_{18}, v_{27}, v_{35}, v_{36})$
19	$(v_{17}, v_{26}, v_{34})$
21	$(v_{25}, v_{33})$

Según el problema típico de la teoría de la producción (96) se tratará de hallar entre estas clases de indiferencia la combinación más favorable, definida como la de coste mínimo. Por lo tanto el criterio de orden que va a utilizarse es el de "ser más barato que", o su equivalente, "tener menos coste que".

Supongamos que el empresario está interesado en producir 15 unidades, para ello dispone de los 4 vectores de producción siguientes cada uno asociado a un coste de producción (calculado para unos precios de  $v_1 = 3, v_2 = 2$ ) (97)

(96) Ver HADAR, Josef "Elementary theory of economic behavior" Addison-Wesley, Publishing Company, Don Mills, 1966 Capítulo 3.

(97) En el ejemplo propuesto ha resultado unas combinaciones misoproducto de una alta improbabilidad técnica, dado que el doblarse la cantidad de factores permanece constante el producto. Como lo que se persigue es examinar un proceso lógico de ordenación de datos, se considera válido el ejemplo.

La correspondencia obtenida está descrita por la siguiente aplicación:

Vectores:	:	(	$V_{10}$	$V_{28}$	$V_{37}$	$V_{19}$	)
			$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Coste	:	(	5	15	20	10	)

El vector de mínimo coste es el  $V_{10}$ . Coste igual a 5.

Del mismo modo sería posible calcular los vectores de coste mínimo para cada cantidad de producto producida, con lo cual podría obtenerse una curva de coste total mínimo discontinua.

El método expuesto es un ejemplo de un procedimiento lógico que puede aplicarse análogamente a otros problemas de la teoría de la producción, organizando los datos en distinta forma. El aspecto más importante que se desea subrayar es que este método es posible siempre que el número de vectores de producción a examinar sea finito, para ello el número de factores de la producción debe ser finito y las cantidades que puedan emplearse de cada uno de ellos deben ser también finitas.

Hay que señalar también que la adopción de la nomenclatura del vector de producción tiene la ventaja de poder adoptar vectores de precios. El coste puede calcularse como producto vectorial del vector de producción por el vector de precios. Por ejemplo: Se calculará el coste del vector  $V_{15} = (1, 6)$  con precios definidos por el vector de precios  $P = (3, 2)$  siendo 3 el precio de  $v_1$ , y 2 el precio del factor  $v_2$ ; el coste puede calcularse utilizando notación, y productos,

vectorial:(98)

$$V_{15} \times P' = (1, 6) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.1 + 6.2 = 12$$

Con esta constatación se sugiere una operatoria sencilla para la manipulación matemática de la teoría discontinua de la producción.

d) El método en el caso de que existan n (muchos) factores de la producción. El método expuesto fundado en la discontinuidad de la medida de los factores y de los productos, es, aparentemente de muy difícil aplicación cuando se han de utilizar muchos factores de la producción.

Un supuesto hipotético puede mostrar el tamaño de la tarea necesaria para examinar uno a uno todos los conjuntos posibles cuando el número de factores es elevado. Sean 10.000 factores distintos, cada uno de los cuales puede ser utilizado en una cantidad idéntica y uniforme de 1 a 50.000 unidades. El número de combinaciones posibles sería de  $50.000 \times 10.000 = 500.000.000$  ~~millones~~ de vectores de producción.

Si no se encuentra un método o sistema de converger rápidamente hacia los conjuntos más convenientes, el método, aunque lógicamente válido, es impracticable porque el número de horas necesarias para la experimentación completa de todos los vectores es excesiva.

(98) El algebra operatoria de vectores y matrices puede consultarse en ALLEN, R.G.D. libro citado en nota 94, capítulo XIII. y en DORFMAN, R. SAMUELSON, R. y SOLOW, R. "Linear programming & economic analysis" McGraw-Hill Book Company, Inc. s/f. Apendice B. A los efectos operatorios del producto de dos vectores pueden considerarse como matrices de una fila o una columna.

Sin embargo es fácil constatar que esta tarea no se comienza cada día de nuevo. Los hallazgos técnicos de la humanidad son registrados, cuantificados, descritos y transmitidos de generación en generación. Cada generación hereda de las anteriores un conocimiento extenso del resultado de millones y millones de experiencias y experimentos realizados en el pasado.

Por esta razón podríamos describir el sistema tecnológico como un sistema con "memoria", del cual hay que realizar un "aprendizaje". Este sistema se "olvida" de las experiencias fracasadas y solamente transmite conjuntos óptimos.

El aprendizaje de los métodos técnicos disponibles es, pues, un método de convergencia muy rápido hacia un planteamiento concreto de la función de producción.

Una de las pruebas a que puede someterse la conveniencia del enfoque de la función analítica de producción es el examen de los registros: libros, planos, dibujos, esquemas, etc, donde se registran los resultados de la investigación técnica, para examinar si ésta está descrita en forma de funciones analíticas o empíricas.

Otra de las pruebas que podría verificarse es el examen de los procedimientos de investigación de las grandes empresas industriales de nuestra sociedad del siglo XX. La investigación consiste en un proceso para encontrar funciones analíticas o bien en

un gigantesco proceso de prueba y error.

El hallazgo de una función analítica que en muchos casos describe una ley de la naturaleza parece ser uno de los métodos que también conducen a una rápida convergencia en el hallazgo de una técnica óptima. Es indudable que la función analítica constituye la gran aspiración de toda ciencia, pero quizá es conveniente, cuando está no se ha hallado aún, no dar por descontada su existencia y seguir acumulando tabulaciones para aspirar a conseguirla. El conocimiento concreto y particular forma parte también del esfuerzo de la humanidad para dominar a la naturaleza (99).

Aunque las posibilidades de una función de producción como se ha descrito formalmente son muchas, el trabajo se realiza también por muchas personas durante muchas épocas. Toda función de producción específica comienza con un conocimiento histórico concreto y no es necesario formalmente proceder tal como se ha descrito en el apartado c) de este trabajo para hallarla.

f) La selección de una función de producción concreta. (100)

Desde un punto de vista del análisis económico es conveniente en muchos casos no identificar plenamente el conocimiento tecnológico histórico con la función de producción. Esta es la especi-

(99) Ver ORTEGA Y GASSET, José "Meditación de la técnica." Revista de Occidente 1964 (1ª ed. : 1939) Capítulos IX, X, XI y XII.  
y LANDES, David S. "The unbound Prometheus" Cambridge University Press, 1969, también HABAKKUK, H.J. "American & British technology in the 19th. century" Cambridge University Press. 1967.



ficación a un caso concreto de tiempo, lugar, disponibilidad de factores y sistema económico concreto de la información tecnológica disponible. Los concretos criterios a aplicar varían con los factores disponibles y con la estructura total del sistema económico. (101)

También es necesario tener en cuenta que el conocimiento tecnológico no se halla en el mismo grado de disponibilidad. Siguiendo el análisis de Schumpeter (102) es posible dividir las tecnologías disponibles según la fase de su desarrollo en: técnicas en proceso de investigación experimental, técnicas cuya aplicación industrial es reciente y constituyen por lo tanto una "innovación" conocida por unos pocos, y técnicas generalmente conocidas y disponibles socialmente.

Aunque las técnicas no sean secretas y se hallen teóricamente disponibles, no por ello pueden ser automáticamente aplicables, especialmente en el caso de técnicas complejas en las cuales el factor conocimiento práctico es importante. (103)

- (101) Ver SEN, Amartya Kumar "Choice of techniques, an aspect of the theory of planned economic development" Oxford, Basil Blackwell, 1968 (1ª ed: 1960) y DOBB, Maurice "Ensayo sobre crecimiento económico y planificación." Técnos, Madrid, 1970
- (102) Ver SCHUMPETER, Joseph A. "Teoría del desenvolvimiento económico", Fondo de Cultura Económica, 3ª edición española, México, 1963.
- (103) La función del aprendizaje en las técnicas ha sido incorporada a modelos macroeconómicos como el de ARROW, K. J. "The economic implications of learning by doing", Review of Economic Studies, 1962, incluido en Newman, Peter: "Readings in mathematical economics", tomo II, The John Hopkins Press, Baltimore, 1968.

d) Una formalización del método de elección en el caso de n factores de la producción (muchos). El método de elección expuesto en la primera parte de este capítulo para 2 factores de la producción era formalmente muy parecido al utilizado con la función de producción continua.

Después de adelantar la hipótesis acerca del carácter histórico de la técnica disponible, puede resultar conveniente realizar otra formalización distinta del método. La empresa conocerá en principio unas técnicas socialmente disponibles para la producción de diferentes cantidades, descritas por vectores que enumerarán la cantidad de cada factor de la producción necesario.

$$\begin{aligned} z_1 &\rightarrow (v_1^1, v_2^1 \dots v_n^1) \\ z_2 &\rightarrow (v_1^2, v_2^2 \dots v_k^2) \\ &\dots \dots \dots \\ z_a &\rightarrow (v_1^a, v_2^a \dots v_t^a) \end{aligned}$$

Por lo tanto la investigación de la técnica aplicable comienza ya con un conocimiento concreto.

Un conjunto de factores específicos como el emplazamiento, comunicaciones, energía, transporte, etc que tienen peculiaridades especiales se encuentran ya incluidos en los vectores anteriores.

Con este conjunto originario de vectores de producción es posible desarrollar el mismo proceso señalado para el caso de 2 factores, aunque es posible sugerir otro método de análisis.

e) El vector de diferencias. Comenzamos <sup>co</sup>ociendo un máximo provisional. Debido al gran número de variaciones posibles y no exploradas, podemos a partir de él, explorar otras posibles combinaciones variando algunas de las cantidades de los factores utilizados, o algunos de los factores. Esta última variación significa introducir en la combinación productiva nuevos factores o retirar completamente algunos de los que se utilizaban.

El cambio en las cantidades de factores puede ser analizado en la siguiente tabla: (u otras semjenantes y más extensas)

Descripción de los factores	Cantidades en el 1.er procedimiento.	Cantidades en el 2º procedimiento	Diferencias.
1. Hectáreas de terreno: . .	3	3	0
2. Horas de trabajo: . . . .	120	120	0
3. Horas de tractor: . . . .	27	32	5
4. Kilos de semilla de trigo	19	12	- 7
5. Kilos de semilla de maíz	7	16	9

Una tabla análoga puede establecerse para los rendimientos de ambos procedimientos.

Descripción de los productos	Cantidades con el 1.er procedimien to	Cantidades con el 2º procedimien to	Diferen- cias
1.- Kilos de maíz: . . . . .	190	120	- 70
2.- Kilos de trigo:. . . . .	77	112	35

Hay que señalar que tanto para los factores como para los productos pueden ser expresados simbólicamente mediante vectores. La diferencia vectorial entre los vectores de producción contenidos en la primera y segunda columna, es el vector de la tercera columna.

Es posible generalizar este resultado, diciendo que entre dos vectores de la producción, que produzcan una gama similar de productos, existirá un vector de diferencias que contendrá las cantidades de cada uno de los factores de la producción que es necesario disminuir, que es necesario aumentar, o que es necesario mantener en la misma cantidad, según el valor y signo de la diferencia.

Formalmente será posible escribir:  $V_1 - V_2 = D_{12}$ .

Un procedimiento análogo y con los mismos fundamentos es posible utilizar para describir los cambios en las cantidades de productos que siguen a una variación de los factores, definiendo un vector de diferencia de productos.

Formalmente será posible escribir:  $Q_1 - Q_2 = E_{12}$

Una vez definido el sentido de los vectores de diferencias de factores y de diferencias de productos podemos exponer simbólicamente el método de exploración a partir de un óptimo provisional.

Sea  $V_1$  un óptimo provisional, o sea el conjunto más favorable de cuantos han sido examinados. Cualquier variación de las cantidades de factores estará descrita por la suma:  $V_1 + D_{1i} = V_i$  que llevará asociada una variación en el vector de productos:

$$Q_1 + E_{1i} = Q_i.$$

Debemos ahora preguntarnos si la variación introducida conduce o no a un nuevo conjunto óptimo. Para efectuar la comparación del nuevo conjunto con el anterior es menester introducir los precios de los factores y de los productos.

Hasta el momento el precio se entendía que era una cantidad de dinero que se paga por una unidad de factor o de producto. Esta definición sigue siendo válida para los productos, pero deberá matizarse en el caso de los factores. Algunos de estos son duraderos y no se agotan como fuentes de servicio productivo con una sola aplicación. Por esta causa en varias oportunidades hemos venido definiendo la cantidad de factor por unidad de tiempo.

Si un factor tiene una duración de varios periodos contables para saber cual es la parte que deberá aplicarse como coste en una función de producción se efectuará un cálculo sencillo. Se multiplica el precio del factor por una fracción en cuyo numerador se sitúa el tiempo que es empleado en la función de producción que es objeto de cálculo y en el denominador su vida media esperada. A la cantidad resultante se le denominará rental.

Eligiendo adecuadamente las unidades de medida de los factores y teniendo en cuenta que según sus características existirá un precio por unidad, un precio por unidad de tiempo o un rental, es posible definir un vector de precios de los factores y un vector de precios de los productos.

La lógica económica sugiere un criterio para decidir si una variación en la producción mejora la situación anterior de la empresa. Este criterio consiste en lo siguiente: si los ingresos derivados de las diferencias en los productos supera a las diferencias de costes, motivados por los cambios en la producción, la nueva combinación de factores es mejor que la anterior, y por lo tanto pasa a ser un nuevo óptimo provisional.

En lenguaje vectorial este principio puede expresarse así:

$$E_{1i} W' - V_{1i} P' > 0 \text{ implica } V_i \text{ mejor que } V$$

Como se sabe  $E$  y  $V$  son los vectores de productos y de factores respectivamente, mientras que  $W$  y  $P$  son vectores de precios.

La anterior diferencia es una diferencia entre dos escalares que a su vez pueden ser positivos y negativos.

A modo de ilustración se expondrá el cálculo para el ejemplo dado anteriormente: Se considerará que el precio del maíz es de 3 y el precio del trigo 2, siendo igual para la semilla como para el producto, el precio de la hora de tractor es 10 y los demás precios pueden omitirse porque al ser la diferencia cero no ejercen influencia.

Los cálculos según la regla anterior deben disponerse del siguiente modo:

$$(-70, 35) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - (5, -7, 9) \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -140 - 47 = -187.$$

La cantidad negativa 187 indica que al efectuar el cambio de procedimiento de producción se experimentaría una pérdida monetaria neta de 187, con lo cual el nuevo procedimiento es menos favorable que el anterior.

f) Particiones del vector de producción. Una de las propiedades más interesantes de los conjuntos considerados como vectores en general, y de los vectores de producción en particular es que su división en partes (104) conserva sus propiedades formales con relación a la suma y al producto.

Examinaremos primero la definición de división en partes. Sea el vector de producción:

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11})$$

Partir un vector es separar sus elementos en partes independientes, de tal modo que cada uno y todos los elementos estén asignados a una de las partes, que ninguno de los elementos esté dos veces y que dos de las partes no tengan nunca elementos comunes.

(104) La definición de partición puede verse en LANCASTER, Kelvin "Mathematical Economics", The Macmillan Company, 1968, y en Apendice Matemático, g.

El vector anterior podría dividirse en las siguientes partes.  
Por ejemplo:

$$V = (v_1, v_4, v_7, / v_2, v_9, v_{10}, v_{11} / v_3, v_5, v_6, v_8)$$

o también

$V = (R_1, R_2, R_3)$ , en que los vectores  $R$  representan las partes en que el vector ha estado dividido. La conservación de las propiedades formales a que nos referíamos antes consiste en que podemos calcular independientemente los vectores de diferencias para cada uno de los vectores partes  $R_1, R_2, R_3$ , y posteriormente recomponer el vector de diferencia total. También podemos efectuar los productos vectoriales de modo independiente:  $R_1 P'_1, R_2 P'_2$  y  $R_3 P'_3$ , procediendo posteriormente a su suma de modo que se produzca la siguiente igualdad:  $VP' = \sum R_i P'_i$ . ( $i=1, 2, 3 \dots u$ )

Estas propiedades formales son muy importantes desde el punto de vista económico por varias razones.

Las particiones del vector de producción permiten agrupar los factores de producción según las necesidades de la contabilidad industrial, ya sea por secciones de la empresa, ya sea por tipos de productos.

Otra partición que puede sugerir-se es la que clasifica los factores de la producción en factores duraderos que han de ser pagados aunque se interrumpa la producción (costes fijos), y factores que se consumen con la producción y que no han de ser pagados si ésta se interrumpe (costes variables). Entre los costes fijos se sugiere otra partición por la duración de los factores, con lo cual se puede asimilar la partición a la práctica contable de



la amortización, asignando una división que contenga todos los factores duraderos que han de ser reemplazados en un periodo de tiempo (por ejemplo un año). Con esta clasificación es posible introducir en la adaptación del tamaño de la empresa un proceso descrito a través de un periodo de tiempo estructurado, tal como se utiliza en contabilidad. (Ver Cap. 3-m).

Otra partición de los factores de la producción es la que podemos hacer entre tres tipos: capital, tierra y trabajo, atribuyendo cada elemento del conjunto de factores a uno de estos tipos. Si se elige para cada una de estas partes del vector de producción una unidad homogénea, se tendrá una función de producción agregada, después de sumar las cantidades de cada factor.

También es interesante considerar la partición de los factores de la producción entre factores estratégicos y factores no estratégicos. Es indudable que una función de producción contendrá miles, a veces millones, de factores de la producción distintos. Unos tendrán mayor relevancia que otros y será más conveniente estudiar qué sucede cuando se varían sus cantidades. Así por ejemplo en el cultivo de cereales es mucho más interesante examinar qué ocurre si varían las cantidades y clases de abonos utilizados, que lo que ocurre cuando varían las herraduras de un caballo que tira de un arado, aunque la herradura, que produce un coste, es también un factor de la producción. Las conclusiones técnicas más importantes de la teoría de la producción se refieren a conjuntos de factores estratégicos.

Precisamente la gran ventaja de la partición de los vectores de producción consiste en que permite una investigación de los cambios que pueden producir mejores combinaciones de factores por partes. Unas personas pueden estar interesadas en mejorar los sistemas de producción, otros los de transporte, otros los de comunicación interior de la empresa, otros los de administración. Dentro de cada una de estas divisiones, unos pueden estar interesados en pequeños detalles del funcionamiento de un torno y otros en conseguir trenes más veloces y más rápidos en las curvas. Siempre que las variaciones de factores que se decidan en una parte del vector no afecten a la cantidad de factores que se utilicen en otra parte (hipótesis de independencia), el progreso hacia la eficacia en la función de producción puede ser una obra colectiva, en la que participen todos los que trabajan en una empresa. Si las variaciones en una parte del vector exigen cambios en otra parte, hay que considerar el vector resultante de su suma y la decisión tecnológica debe tomarse en conjunto. (coordinación).

g) Las leyes de la producción. En el Capítulo 1º, apartado d) se han supuesto algunas propiedades que debería tener una función continua de producción, derivadas de contrastaciones empíricas realizadas sobre el comportamiento de la misma. Estas propiedades (leyes de la producción) consistían en: 1º) la ley de la productividad marginal decreciente, que afirmaba que a medida que se aumentaba la cantidad de un factor los aumentos en la cantidad del producto decrecían, 2º) la ley de las variaciones proporcionales

en las cantidades de factores y de productos, que afirmaba que si se duplicaba (multiplicaba por una constante  $\lambda$ ) la cantidad de todos los factores, la cantidad de producto también quedaba duplicada (multiplicada por la misma constante). (105).

Respecto a la primera ley cabe decir que no existe ninguna dificultad para expresarla en forma de cálculo vectorial, ya que es posible crear un vector de diferencias sucesivas de producto  $E_{ik}^n$ , que esté formado por las cantidades adicionales de producto que se obtienen (de 1 a n) a partir de añadir sucesivas unidades del factor k al vector i.

Tampoco existen dificultades formales para expresar en cálculo vectorial la segunda ley, que implica lo siguiente  $\lambda V_i \rightarrow \lambda Q_i$ .

En ambos casos las posibilidades formales quedan supeditadas al cumplimiento experimental. La notación expuesta permite organizar su verificación en el marco de una contabilidad, con lo cual su discusión y comprobación podría tener un mayor campo de acción.

Sin embargo hay que señalar que para la práctica corriente de la búsqueda de las combinaciones óptimas de factores de producción a nivel de empresa, es más conveniente llevar a término variaciones que impliquen cambios simultáneos en varios de los factores y en cantidades no proporcionales.

(105) Cuando esta ley se cumple podemos expresar un vector, que denominaremos vector de coeficientes técnicos, que indicará la cantidad necesaria de cada uno de los factores para producir una unidad de producto. Le llamaremos A. Ver ALLEN, R.G.D. libro citado en nota 94. Estos son los vectores de producción más comunmente utilizados, aunque, actualmente, en este ensayo, como en principio no se supone la vigencia de esta ley, no tienen tanto interés.

Por ello resulta más conveniente comprobar las dos leyes en el ámbito para el cual fueron supuestas. La primera para cantidades agregadas de factores como la tierra, el trabajo y el capital, en donde sus posibilidades de cumplimiento parecen mayores. La segunda adaptada a una perspectiva a largo plazo, en la que los cambios no sean los que se van efectuando día a día en un corto periodo, sino los que se efectúan a través de un dilatado espacio temporal, y no en el marco de una sola empresa, sino en el marco de varias empresas y entre proyectos alternativos de instalaciones productivas.

Una tercera ley de más difícil cumplimiento en una empresa es la de las igualdades entre las relaciones de productividades marginales y de precios, para todos y cada uno de los factores de la producción. Para el cumplimiento de esta ley es necesario la aceptación de la hipótesis de continuidad. Si se desea su cumplimiento aproximado es necesario realizar todos los cambios incluidos en el vector de diferencias con cantidades de factores del mismo valor monetario, y con la condición de que éste sea muy pequeño. En principio no parece que ésta sea una práctica común, y en muchos casos es discutible que sea posible.

Como comentario a ello puede decirse que la obtención de un conjunto óptimo depende en gran parte de poseer la suficiente información tecnológica, que no es nunca gratuita, y de examinar cuidadosamente cuáles son las combinaciones de factores posibles en la realidad, y cuáles son los más convenientes.

Esta última ley, en su formulación continua, tiene más importancia en la teoría de la distribución de la renta, que propiamente en la teoría de la producción, donde su significado operativo es muy poco.

En la teoría de la producción tiene un doble significado: ético, en cuanto cada factor es retribuido por la aportación del último factor de su clase, y práctico, en cuanto permite anudar lógicamente la teoría de la producción y la distribución. Este puente lógico entre ambas puede ser reconstruido bajo otro aspecto.

Si los factores de producción son combinados en conjuntos óptimos, de acuerdo con los cálculos de mercado, los factores que entren en mayor cantidad de la que se ofrece en las combinaciones de producción elegidas, tenderán a tener una demanda superior a la oferta, quedando empleos vacantes, y tendiendo su precio a subir, mientras que los factores que tienen una oferta a los precios vigentes superiores a la demanda creada por la elección de técnicas óptimas elegidas, tenderán a estar desocupados, existiendo desempleo para ellos, con lo cual sus precios tenderán a bajar. Para ello será necesario que una disminución en el precio aumente la cantidad del factor empleado. En principio, y sin presuponer que debería matizarse en la teoría de la distribución, se acepta la demostración de Samuelson (ver nota 39).

Con ello sería posible conseguir una regla operativa para observar el sistema: dada una clasificación suficientemente detallada de los tipos de factores de la producción, la observación de la cantidad de vacantes, o del número de factores desempleados de cada tipo, nos daría una medida de los desequilibrios que, con los precios actuales, se producen en el sistema como resultado de la adopción de las técnicas, que tienden a ser óptimas, en el marco de las empresas y organismos de producción.

Con ello queremos dar a entender que todo cambio en la función de producción, induce un vector de diferencias, que tiene una repercusión sobre el mercado de factores, que, dada su oferta, tiende a variar los precios de los factores, alterando así como consecuencia las condiciones bajo las cuales se elige la técnica óptima.

La idea de que las existencias (stocks) tanto de factores como de productos, a través de sus variaciones, proporcionan información válida sobre el estado del sistema va a ser desarrollada en la próxima parte de este trabajo (Capítulo 5), y en el capítulo siguiente (Capítulo 6º) se examinará cómo puede observarse esta interdependencia de factores y productos y su incisión en las decisiones de la producción a través de una concepción finita del sistema económico.

---

Capítulo 5.º—El dinero como instru-  
mento de regulación en  
la teoría de la empresa.

"La doctrina habitual de la demanda y el precio en la que se forman en las universidades los estudiosos de la Economía, apenas ha variado desde los adelantos introducidos por las teorías de la competencia imperfecta o los principios de la sustitución y complementaridad. Ese anquilosamiento, próximo ya a una generación, con ser grave, no es, sin embargo, lo peor. Como mientras tanto ha variado sustancialmente el cuerpo de la doctrina económica, a causa de la introducción de los principios macroeconómicos por Keynes y sus discípulos, la teoría de la demanda y el precio aparece como un resto antediluviano en los tratados de Economía, sin unidad posible con los capítulos posteriores".

J. Prados Arrarte:

"Principios de una teoría económica dinámica", (página 11)



C A P I T U L O    5º

=====

EL DINERO COMO INSTRUMENTO DE REGULACION

EN LA TEORIA DE LA EMPRESA

ooooooo

5-a) Discontinuidad y regulación. Una economía que contenga bienes indivisibles, cuya unidad se intercambie por muchas unidades de otro bien, difícilmente podrá funcionar - sin dinero. En las razones expuestas por W. Stanley Jevons para justificar la necesidad de dinero, la última, pero no la menos importante, es la "necesidad de un medio de subdivisión". (106)

En la teoría de la discontinuidad el dinero realiza un papel importante ya señalado en el Cap. 3º. Pero por su función en el sistema económico, puede realizar otra que vuelve a relacionarle con otro problema de discontinuidad.

Por sus funciones de medio de pago y de acumulación el dinero puede ser utilizado como instrumento de regula-

(106) Ver JEVONS, W. S. "Money and the mechanism of exchange" Kegan Paul, 1910, reproducido en el artículo "Barter" de los "Readings in monetary theory" seleccionados por R.W. Clower. Penguin Books Ltd. 1969, que contiene el célebre ejemplo de Mademoiselle Zélie.

ción por una Autoridad Económica Central, que desee influir en la marcha de la economía. Esta Autoridad deberá conocer la situación y composición del sistema si quiere que su regulación sea eficaz, por ello habrá que plantearse si la cantidad de información de que debe disponer es finita o - infinita, completa o incompleta. (Cap. 6). Pero previamente, se examinarán los presupuestos del mecanismo del sistema, porque de afectar a la conducta de una empresa en particular, habrá que considerar que las decisiones de producción no solo son afectadas por los precios de los factores y productos tal como habíamos supuesto en los capítulos anteriores, sino también por la oferta monetaria.

Se expondrá el modo de como los efectos de las variaciones de la cantidad de dinero no sólo modifican la conducta de una empresa en cuanto a sus decisiones de producción, a causa de los cambios que inducen en su demanda de productos, sino que también, como es bien conocido pero menos subrayado, afectan, a través de la influencia en la cantidad de dinero disponible, en su demanda de factores.

b) El dinero y la teoría de la empresa. La teoría de la empresa que forma parte del conjunto de conocimiento - económico denominado gran síntesis neoclásica (107) fué de-

(107) Con el nombre de gran síntesis neoclásica se ha designado a la integración de las aportaciones marginalistas, anteriores a Keynes, con el pensamiento de este autor y sus continuadores. Ver SAMUELSON, P.A. "Curso de Economía Moderna" , Aguilar, S.A. de Ediciones, Madrid 1958.

desarrollada bajo la influencia intelectual de Alfred Marshall y de sus colaboradores y discípulos de la escuela de Cambridge. Las ideas monetarias de esta escuela, compartidas por las demás escuelas de fines del siglo XIX, creían en la existencia de una "dicotomía" entre la economía real y la economía monetaria. El dinero era "un velo" que era necesario abstraer para encontrar debajo de él las auténticas causas de los cambios económicos. (108)

Estas escuelas creían en la ley de Say, en cuya virtud la oferta crea su propia demanda, limitándose ambas: - oferta y demanda - al cambio de bienes y servicios por bienes y servicios.

Esta situación de la teoría marginalista conducía a contradicciones que en nuestro marco institucional son aún más flagrantes. A este respecto dice Jesús Prados: (109)

"La doctrina neoclásica no ha podido encontrar en su exposición un lugar adecuado para el crédito, a pesar de la situación preponderante que éste tiene en el mundo moderno. Por motivos similares el análisis de los ciclos económicos hecho por la doctrina neoclásica es poco valioso, ya que pone el acento en las variaciones del nivel general de los precios, más bien que en las alteraciones relativas de los distintos precios dentro de ese cambiante nivel general, hecho que es de la máxima importancia".

(108) Ver PRADOS, Jesús, libro citado en nota 5, parte IV "La teoría del dinero. También SAMUELSON, P.A. "What classical and neo-classical monetary theory was" Canadian Journal of Economics, vol 1, nº 1 y ROJO, L.A., "Keynes y el pensamiento macroeconómico actual", Ediciones Tecnos, S. A. pag. 20-25.

(109) libro citado en la nota anterior, página 201.

Se reconocían algunos efectos secundarios de las variaciones de la cantidad de dinero. Tales podrían ser el aumento del nivel general de precios, las alteraciones de los flujos de gasto e inversión a favor de esta última y unos efectos perjudiciales para las personas que detentaban rentas fijas.

Matemáticamente, como pusieron en evidencia Patinkin y Leontieff, todas las funciones de demanda de bienes eran homogéneas de grado cero con relación al dinero y ninguno de los participantes en el sistema tenía "ilusión monetaria", ante las variaciones del nivel general de precios. Supuestos ambos difíciles de contrastar con la realidad.

El ataque más importante contra esta concepción proviene de la obra de John Maynard Keynes "La teoría general de la ocupación, el interés y el dinero" (110) que terminó con la dicotomía tan en boga durante las generaciones anteriores de economistas. Keynes introduce el motivo precaución y especulación para guardar dinero, con lo cual interrumpe la circulación mercancías-dinero-servicios y deja sin validez la ley de Say, que en todo caso debe incluir magnitudes monetarias. El cambio se efectúa entre: mercancías, servicios, dinero y crédito contra mercancías, servicios, dinero y crédito.

Keynes también introduce otro supuesto importante. Los salarios nominales no se reajustan a la baja, por grande que

(110) KEYNES, John Maynard "The general theory of employment interest and money" Macmillan & Co. Ltd. Londres, 1964 (1ª edición: 1936) y PRADOS, Jesús, libro citado en nota 5, páginas 205-208.

fuera la desocupación, aunque ésta alcanzara valores tan graves como los que se produjeron durante la gran crisis de los años 29-39. Con ello el sistema perdía su tendencia automática al pleno empleo.

A partir de este momento la hipótesis de una influencia de la cantidad de dinero sobre el nivel de actividad económica se abre paso. Sin embargo, es necesario establecer claramente la relación entre los movimientos en la cantidad de dinero y los movimientos de las cajas en las empresas, para estudiar con detalle los efectos de las variaciones de la oferta monetaria.

Keynes había señalado que los sujetos económicos tenían unos motivos concretos para guardar dinero: el de caja, el de precaución y el especulativo, a los cuales Day añadió el motivo deflación. Los motivos keynesianos podían obrar en sentido inverso al aumento de la cantidad de dinero, de tal modo que la autoridad monetaria viera frustrados sus deseos. Si inyectaba cantidades de dinero nuevo en el sistema económico, los sujetos particulares podían esterelizarlo, aumentando sus saldos inactivos. (111)

Por ello llama la atención que después del reconocimiento de la "no neutralidad" del dinero para el sistema económico se haya seguido manteniendo la neutralidad del dinero en microeconomía. En este campo de la teoría económica se sigue soste-

(111) Ver PRADOS, Jesús, libro citado en nota 5 páginas 208-212, "los motivos para mantener dinero en caja". Ver también DAY, A.C.L. "Outline of Monetary Economics". Oxford, at the Clarendon Press, 1957.

niendo que la empresa se rige solamente por los precios relativos de los factores y de los productos, sin verse afectada directamente por las variaciones de la cantidad de dinero. Se subraya que las variaciones en el nivel de actividad vendrán determinadas por un método indirecto: Los cambios en la demanda de sus productos, aunque en autores como Robertson, Friedman y Lavington la afirmación es extraordinariamente matizada, teniendo el dinero también influencia sobre la demanda de factores (112).

C) ¿Es el dinero neutral en economía? Con ello queremos preguntar si existe alguna razón para creer que las variaciones en la cantidad de dinero puedan tener un efecto directo en las decisiones de la empresa, además del indirecto inducido por las variaciones en la cantidad de dinero a través de la variación en la demanda de factores .

d) La empresa y la tasa de interés. Además de la influencia indirecta a través de las variaciones de la demanda, la empresa se encuentra ligada al mercado monetario a través de su demanda de fondos para inversión. Para los ~~marginallistas~~ es válida la doctrina, desarrollada a partir de la obra de Eugen von Bohm-Bawerk (113), que atribuía a la tasa de interés la misión de equilibrar la oferta y la demanda de capital. Es sabido que tanto esta oferta como la

(112) Ver FRIEDMAN, Milton: "The quantity theory of money: A restatement", reimpreso en M. G. Mueller: "Readings in macroeconomics", Holt Rinehart and Winston, Inc. Nueva York, 1966. LAVINGTON, F.: "The english capital market", Londres, 1921, y ROBERTSON, Dennis H.: "Lecciones sobre principios de economía", Madrid, 1961.

(113) Ver LUTZ, Friedrich A.: "The theory of interest", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1966, cap. I.

demanda debe producirse en forma monetaria, siendo el dinero el principal vehículo de transmisión de los recursos entre los ahorradores e inversores. Con terminología actual podríamos suponer que existe un mercado de bonos vendidos por las empresas que desean obtener dinero para destinarlo a la inversión y adquiridos por los ahorradores quienes son altamente susceptibles a las variaciones de la tasa de interés. Cuando ésta es alta ahorran mucho más que cuando esta tasa es baja. La demanda de inversión se produce a través de cálculos de economicidad con grado de certeza suficiente para que se seleccionen las inversiones que presentan perspectivas de mayor rentabilidad.

Desde Wicksell es sabido que el poder de crear dinero que detentan los bancos puede alterar la situación de equilibrio. El exceso de dinero en el mercado de capitales puede hacer que la tasa de mercado sea inferior a la tasa natural, y que en consecuencia se produzca un desplazamiento desde el gasto a la inversión (114).

Por esta vía la oferta monetaria podría influir en la conducta de la empresa, haciendo que, al disponer de mayores fondos para inversión, adoptara procedimientos de mayor relación capital-trabajo o , en terminología de la escuela de Viena, de mayor

(114) Ver WICKSELL, Knut: "Lectures on Political Economy," volumen II, Augustus M. Kelley, Nueva York, 1966.

longitud del proceso de producción (115)

f) Reconsideración del problema. ¿Es ésta la única vía por la cual la oferta monetaria puede alterar la conducta de la empresa? El objeto de la exposición ~~anterior~~ es examinar esta pregunta con mayor detalle y argumentar la posibilidad para que exista otro camino de influencia del dinero en la conducta de la empresa. Este camino queda abierto al considerar que, desde Keynes puede admitirse que las empresas no trabajan siempre con la ocupación total de los factores de producción, que las ventas presentan oscilaciones cíclicas, con la consiguiente acumulación de existencias (stocks). Las necesidades de dinero en una u otra fase del ciclo son distintas y por esta causa las modificaciones en su oferta pueden inducir variaciones en las decisiones de la empresa. También hay que tener en cuenta que en las prácticas actuales de la empresa del siglo XX ha adquirido gran importancia el crédito concedido por los proveedores, cuyas oscilaciones también pueden estar influidas por la actitud de las autoridades que controlan la oferta monetaria. Por ello quizá resulte aconsejable examinar de nuevo esta cuestión bajo supuestos institucionales un tanto distintos a los de la escuela marshaliana, para constatar si los resultados son concordantes o discordantes.

(115) Ver PRADOS, Jesús, libro citado en nota 5, capítulo 1º, para un detallado estudio de las relaciones entre la teoría austríaca del capital y la concepción moderna, derivada de la relación capital/producto.



El modo con que la aubridad monetaria puede influir directamente en las variaciones de la actitud de la empresa nos lleva a considerar con más detenimiento un tipo especial de valor: la letra de cambio. Este título tiene unas características jurídicas que le distinguen de los bonos, obligaciones y acciones, pero las características diferenciales que deseamos señalar son de tipo económico. Veamos pues las diferentes características entre el bono, que en el apartado d) suponíamos que actuaba de intermediario en el mercado de capitales y que era el título que compraban los ahorradores, y la letra de cambio.

Una diferencia fundamental consiste en que la letra de cambio está asociada a la creación de dinero por el sistema bancario, mientras que el bono, aunque pueda estarlo, no lo está de un modo tan automático. La práctica comercial ha llegado a generalizar la venta de letras de cambio, creadas por ventas de los productos propios, a la banca, a cambio de depósitos creados por ésta, que circulan como dinero. La venta de una letra de cambio a la banca va acompañada de un acto de creación de dinero, mientras que el pago de la misma letra al banco es un acto de destrucción de dinero.

Los neoclásicos no introducen en el esquema general de financiación de la empresa un título de tipo semejante a la letra de cambio, con lo cual una vía de relación directa entre el sistema monetario y la empresa queda prácticamente fuera de sus sistema

de razonamiento.

Existe otra notable diferencia entre la letra de cambio y el bono. Esta diferencia consiste en que la letra de cambio, por regla general, es emitida contra la venta de productos, mientras que el bono es emitido por la empresa contra la garantía de la capacidad general de pago de la empresa (116)

Por lo tanto, excluyendo situaciones excepcionales que serán examinadas más adelante, si las ventas de la empresa se interrumpen cesa también la emisión de letras de cambio y su venta a la banca. El flujo de caja se interrumpe. La empresa debe seguir pagando los factores de la producción sin cobrar sus productos, que se acumulan en forma de existencias (stocks).

Por el contrario cuando la empresa se encuentra con un aumento general de precios necesita mantener más dinero en caja por motivo transacciones y precaución, en un momento en que por la pérdida de valor que experimenta el dinero el motivo especulación le aconsejaría desprenderse de él y mantener el mínimo posible. Esta doble tendencia a aumentar la tenencia del dinero cuando suben todos los precios y, por otra parte, a desprenderse de él se zanja generalmente en favor del aumento, mientras que el proyecto "ex-ante" era desprenderse de tanto dinero como fuera posible. (116-bis)

(116) Es necesario recordar que en las actuales circunstancias institucionales el problema típico de la teoría cuantitativa no se plantea casi nunca, salvo en casos como el reciente de aplicación del sistema decimal en ~~una~~ Inglaterra en que todos los saldos se multiplicaron por una constante. El dinero entra asimétricamente en el sistema, teniendo más posibilidad de obtenerlo los que poseen mayor patrimonio.

(116-bis) Ver PRADOS, Jesús, libro citado nota 5, pgs. 213-219

Con anterioridad a Keynes, siendo el pleno empleo la hipótesis fundamental de trabajo, la anterior situación solamente podría ser muestra de que existían causas reales, - en este caso la ausencia de demanda del producto fabricado por la empresa -, que produjeran la anterior situación. En la actualidad, una vez eliminado el supuesto de pleno empleo y admitidos ciclos de demanda generales para todos el sistema económico y particulares para cada industria y empresa, hay que admitir que pueden presentarse situaciones en que los cambios en las condiciones del crédito bancario (oferta monetaria) influyan en el cuadro de situación de una empresa. También es posible, en principio, admitir que las decisiones que la empresa tome dependen, en parte, de las condiciones de crédito. En este caso el dinero dejaría de ser neutral en "microeconomía".

g) Replanteamiento de la teoría de la empresa con inclusión del dinero. Por todo cuanto se ha dicho anteriormente, puede resultar conveniente replantear la teoría de la empresa incluyendo en ella el dinero. El modelo formal neoclásico acostumbra a señalar que la empresa <sup>ra</sup> ~~com~~ factores que transforma en - productos, que para motivos de exposición se supondrá uno solo. Los criterios mediante los cuales se eligen los factores y las cantidades convenientes de cada uno ya han sido examinados en el capítulo anterior. La cantidad de producto se fija atendiendo al precio vigente en el mercado, y a una información de tipo interior a la empresa. El empresario calcula la diferencia entre los ingresos que percibirá vendiendo cantidades alternativas de productos y los costes que producen la fabricación de

estas mismas cantidades y se decide por la cantidad que le proporcionará una mayor diferencia, o sea que producirá los beneficios máximos (117).

Hay que subrayar que estos cálculos se efectúan por intermedio del dinero, el cual es el Homogeneizador de las distintas cantidades (Cap. 3º). Por otra parte el cumplimiento de estos planes que supondremos para simplificar, que se cumplen siempre, se realizarán a través de un proceso monetario. En principio la empresa dispondrá de una cantidad de dinero (118) que le permitirá adquirir factores de la producción para producir productos y venderlos. Tendrá, pues, en principio una cantidad de dinero que denominaremos caja o capital líquido y en el transcurso de sus operaciones se producirá una corriente de pagos y cobros, - que formarán una contrapartida, como un espejo que los refleje, de los movimientos de factores y productos. Denominaremos a la caja - C -, a los ingresos - I -, y a los pagos - P -.

El dinero tiene en esta corriente una función importante, dado que, ya sea por costumbre comercial o por la ley (119), una empresa no puede quedar con una caja por debajo de cero. Esto

(117) Ver SAMUELSON, P.A. libro citado en nota 4, capítulo IV.

(118) Un autor que ha insistido sobre la concepción de la empresa como un proceso Dinero-Factores-Dinero, ha sido Carlos Marx. Ver MARX, Carlos: "El Capital", vol I, México, Fondo de Cultura Económica, (4ª ed.), 1966.

(119) Artículos 870 y 874 del Código de Comercio.

implica el cese de sus operaciones. En el planteamiento de la teoría de la empresa debemos pues formular una condición de caja explícita, además de la condición de actuar para conseguir beneficios máximos. Esta condición puede expresarse de la siguiente forma:

$$C \geq 0$$

o sea dinero en caja igual o mayor que cero.

Expresada la misma condición en forma de flujos tendremos la condición de que el capital líquido inicial más los ingresos y menos los pagos debe ser también igual o mayor que cero.

Utilizando el simbolismo creado anteriormente, la igualdad expuesta quedará establecida del siguiente modo:

$$C + I - P \geq 0$$

h) Clasificación de los factores de la producción. La concepción clásica, Adam Smith, David Ricardo, Stuart Mill, y en ciertos sectores de las marginalistas, como Bohm-Bawerk (120), el tipo de factores más caracterizado que debía adquirir el empresario era el trabajo. El capital líquido que debía poseer originariamente estaba destinado a que los trabajadores pudieran adquirir los bienes de consumo necesarios para sobrevivir mientras participaban en la producción. Una vez ésta realizada era de venta casi inmediata. El empresario se resarcía de su inversión y raramente se presentaba el problema de acumulación de

(120) Ver LUTZ, Friedrich A.: "The Theory of Interest", Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1967

existencias (stocks).

En las actividades agrícolas el empresario o era el dueño de la tierra o la tomaba en arrendamiento. En ambos casos la rotación de liquidez tenía unas características poco complejas.

Con el desarrollo del sistema industrial el énfasis de las adquisiciones que debe realizar el empresario ha variado. Los métodos de producción, empleados por el sistema industrial, exigen grandes desembolsos en el tipo de factores de la producción producidos que denominamos capital. Una de las características que presentan este tipo de bienes es una duración superior al periodo contable. Por esta causa su pago debe hacerse en anualidades mediante un proceso de amortización.

El fondo de caja originario se amplía con la inclusión de los bienes de capital. Este incluye no tan sólo los pagos a los trabajadores para que puedan subsistir, sino también los pagos por los bienes de capital o herramientas con que deberán trabajar los obreros.

Este fondo de capital o bien deberá ser aportado por el empresario, o bien deberá ser conseguido en el mercado de capitales mediante la venta de bonos. En los casos de empresas grandes, la venta de acciones o partes alícuotas de capital en el mercado de valores pueden ayudar, y de hecho ayudan, a recoger las grandes sumas necesarias para los proyectos industriales de envergadura.

En este esquema no se incluyen las existencias (stocks). En un proceso productivo serán necesarios en muchos casos tres tipos de existencias: de primeras materias, de productos en curso de fabricación y de productos acabados. Las existencias pueden calcularse de modo que, dadas las condiciones técnicas de producción y venta, sean mínimas (121). La empresa deberá contar con un desembolso de caja para que sea posible tener este nivel permanente de existencias. Este desembolso formará parte del capital (en sentido contable) de la empresa. Mientras no se produzcan grandes alteraciones en el volumen de las existencias (stocks), no será necesario modificar la cantidad de dinero que originariamente fué necesaria para su adquisición, por lo menos en términos importantes.

Con ello hemos ampliado los factores de la producción a cuatro tipos distintos de elementos: los tres clásicos: tierra, trabajo y capital, y un cuarto, que no se descarta que sea cero, al cual llamaremos existencias (stocks). Las existencias se diferencian poco del capital, pero a efectos de este análisis es necesario considerarlas como un elemen<sup>to</sup>aparte. Si alguna propiedad aparte pudieran tener sería la de consistir en el capital que va a ser consumido (que va a desaparecer) incorporado en la producción y en los productos ya terminados y no vendidos.

(121) Ver BRIGGS, P.G. y otros: "Les stocks et la gestion des - stocks", Entreprise Moderne d'edition. Paris, 1970.

Como nuestro objeto es examinar la incidencia sobre la caja de la compra de estos factores es conveniente examinar los diferentes modos de pagos a los mismos que son más comunes. El trabajo se acostumbra a pagar cuando ya ha sido prestado y el trabajador es generalmente acreedor del mismo, siendo normal en nuestro sistema el conceder crédito a la empresa de hasta un mes. Los pagos por la tierra y el capital pueden hacerse de manera alternativa. La empresa puede comprar los bienes en cuyo caso debe abonar su precio ya de una vez, ya mediante un conjunto de pagos distribuidos en el tiempo, o bien alquilarlos, en cuyo caso debe pagar una renta contractual cada periodo de tiempo.

En la financiación de las existencias (stocks) es donde se produce una de las peculiaridades del sistema capitalista industrial. El empresario aplaza generalmente su pago durante algún tiempo a la vez que aplaza el cobro de los productos vendidos y en poder del comprador, mediante concesión de crédito. El balance entre los créditos concedidos y recibidos para la financiación de existencias (stocks) puede producir un equilibrio o puede llevar a la empresa a una situación que, siendo favorable, reintegra a su caja la diferencia y, siendo desfavorable, le obliga a una nueva inversión dineraria para financiar la parte de existencias (stocks) en exceso que se encuentra en manos de los compradores y que no han sido pagados.

La empresa puede en este último caso, siempre que lo desee y el sistema bancario lo acepte, cobrar la parte aplazada de sus



ventas emitiendo letras de cambio que vende a un banco, quien la paga mediante la creación de un depósito.

i) Los modos de financiar los factores de la producción. La financiación de empresas es una técnica compleja (122), y la simplificación introducida, solamente pretende construir un modelo simple para poder efectuar un razonamiento de carácter general.

En este modelo simple supondremos que la empresa financia mediante la venta de valores (aportaciones de capitalistas) y mediante bonos de renta fija a largo plazo, todo el capital necesario excepto el crédito concedido a sus clientes, el cual es convertido en disponibilidades líquidas mediante la emisión de letras de cambio y su descuento en la banca.

En el esquema encontramos los pagos a factores de la producción clásicos: tierra, trabajo y capital, cuya financiación se efectúa mediante aportaciones capitalistas; ya sea mediante la venta de participaciones en acciones o de bonos. Y los pagos por los factores que hemos denominado existencias (stocks) de productos terminados, de productos en curso de elaboración, y de primeras materias, cuya financiación suponemos que se efectúa principalmente a través del crédito bancario y del crédito de proveedores. De este modo los mercados donde la empresa actúa -

(122) Ver por ejemplo: DEFOSSE, Gastón, "La gestión financiera de las empresas" Ediciones Ariel, Barcelona, 1962.

pueden dividirse en dos tipos distintos: mercados de capitales donde la empresa vende títulos a largo plazo y con garantía de su capacidad general de pago, y mercados de dinero y crédito donde la empresa vende títulos a corto plazo (letras de cambio) emitidos como consecuencia de ventas de sus productos a crédito, y pagados por la Banca mediante creación de nuevos depósitos bancarios equivalentes a dinero.

En principio supondremos ambos mercados separados, para comentar posteriormente la posibilidad de su conexión.

j) Condiciones para la neutralidad del dinero en la empresa. Cabe preguntarse: ¿ Los cambios institucionales que han incluido en la teoría neoclásica de la empresa a las existencias (stocks), los créditos entre empresas y su venta al sistema bancario mediante la emisión de letras de cambio pagadas por los bancos con nuevos depósitos a la vista, es decir con dinero recién creado, modifican sustancialmente la teoría neoclásica del comportamiento de la empresa?. Mientras se mantengan dos hipótesis válidas, para los autores marginalistas cabe decir que seguramente no se modificarán las conclusiones de la teoría de Marshall. Estas dos hipótesis son la de pleno empleo de los recursos y la de competencia perfecta. Bajo la hipótesis de pleno empleo, lo normal será que la empresa, cuya demanda correspona a sus previsiones, no verá aumentada la cantidad de existencias (stocks) y por lo tanto la financiación de la cantidad mínima necesaria para su funcionamiento será una cuestión a resolver por una sola vez mediante

el capital líquido propio y el saldo <sup>del</sup> ~~crédito~~ con sus proveedores y clientes, conjuntamente con el sistema bancario.

El dinero en el mercado de capitales será también neutral mientras todas las empresas actúen en competencia perfecta. La tasa de interés acomodará las necesidades de capital a las ofertas de ahorro y aunque pueda existir una cierta incertidumbre acerca del rendimiento real futuro de un proyecto de inversión existirán medios de defenderse contra ella. Tampoco puede suponerse que existirá por parte de todos los inversores perfecto conocimiento de las posibilidades del mercado y es de suponer que se produzcan "fricciones" que impidan un perfecto ajuste entre la oferta y la demanda, pero que no representarán más que pequeñas distorsiones en los valores de equilibrio (123).

La situación cambia cuando abandonamos estos dos supuestos, y ya sea por algunas de las razones expuestas por Keynes (124), que el sistema económico genere una cantidad tan grande de ahorro que no pueda ser absorbido por la inversión a ninguna tasa de interés por baja que sea, o porque no exista flexibilidad de precios y de salarios o por alguna otra se encuentra el sistema desocupado y sometido a movimientos cíclicos de demanda, la empresa puede encontrarse con variaciones en las existencias de productos que se acumulan en sus almacenes.

(123) Ver KNIGHT, Frank: "Riesgo, incertidumbre y beneficio" Aguilar S.A. Madrid, 1947 y DOBB, Mauricio "Economía Política y Capitalismo" Fondo de Cultura Económica, México (2ª ed) 1961.

(124) Ver ROJO; Luis Angel, libro citado en nota 108.

En este caso la empresa, si debe seguir manteniendo la producción y pagando los factores de la producción, deberá necesitar una mayor cantidad de dinero de la que necesita habitualmente ya que tendrá que hacer frente a los pagos sin que se produzcan cobros.

También cambia la situación cuando se abandona la hipótesis de mercado perfecto. En un mismo mercado de capitales pueden concurrir empresas actuando en mercados de monopolio, oligopolísticos y atomizados. Sus expectativas de beneficios serán distintas (125) con gran probabilidad de que sean mayores cuanto más limitado es el acceso a su mercado. Por ello parece lógico que puedan pagar tasas de interés mayores.

Con ello queda demostrado que si completamos la teoría - neoclásica con variaciones de tipo institucional por una parte, que la acerquen más a las condiciones del capitalismo actual, y por otra parte suprimimos las condiciones de pleno empleo y - mercado perfecto, existen cambios en los mercados tanto de dinero como de capital.

Así — puede suponerse que: las cantidades de dinero que

(125) Ver LYPSEY, Richard G. "Introducción a la economía positiva" Tercera Edición, 1969, Editorial Vicens y Vives. En el libro de PRADOS ARRANTE, Jesús citado en nota 5 se expone el punto de vista del monopolio a largo plazo, (Parte I.)

necesitará una empresa para financiar variaciones importantes en las cantidades de sus existencias (stocks) pueden ser importantes y que, a causa de distorsiones producidas en el mercado de capitales por la concurrencia de empresas con posibilidades de beneficio asimétricas, puede ocurrir que la empresa, actuando en competencia perfecta, no consiga todos los fondos que necesita para su desarrollo.

Admitiendo preliminarmente estas proposiciones es conveniente destacar que con ello no queda probado que las alteraciones que con ello se producen en el mercado monetario tengan ninguna influencia en las decisiones que se tomen respecto a la cantidad a producir, en la ocupación de los factores y en la compra de factores, es decir en las variables reales del sistema.

Esto será examinado con mayor detalle después de un breve paréntesis para estudiar las condiciones de financiación en la empresa que actúa en un mercado de competencia perfecta.

k) Tipos de mercado perfecto y condiciones de financiación. El mercado perfecto presenta diversas modalidades de ajuste que requieren algún comentario porque presuponen diferentes condiciones de financiación.

En el mercado perfecto existe una gran cantidad de empresas atomizadas que pueden vender a un precio independiente de

su voluntad toda su producción (126).

Si estas empresas venden un producto perecedero, del cual no pueden acumularse existencias (stocks) las condiciones de la oferta y la demanda dominarán el mercado. Salvo - que ambas fueran inestables, dominará el mercado la que presente mayor inestabilidad. Sea la oferta o sea la demanda.

En general puede suponerse con mayor razón que va a ser la oferta la que presente mayor inestabilidad. Con ello se - producirán fuertes variaciones de precio, que en el caso de ser el periodo de producción largo pueden producir ciclos como el típico de la telaraña (127).

En este caso debe suponer que una empresa tendrá en unos periodos pérdidas y en otros beneficios, equilibrándose a largo plazo unos con los otros y deberá disponer de una cantidad de dinero para sobrevivir a las épocas de crisis. El flujo de caja no será tampoco en este caso estable.

Otro tipo de empresas que tiene un modelo típico de acumulación de existencias (stocks) en el caso de competencia

(126) Ver LIPSEY, Richard, libro citado en nota anterior.

(127) Ver EZEQUIEL, Mordecai "El teorema de la telaraña". Quaterly Journal of Economics, febrero 1938, incluido en HABERLER, Gottfried "Ensayos sobre el ciclo económico", Fondo Cultura Económica, México 1956.

perfecta es la empresa con demanda estacional, (por ejemplo los productores de turrón, de champán). Estas empresas necesitarán de mayor cantidad de fondos para financiar su producción, que se venderá en muy poco tiempo, con una gran afluencia de caja. Este tipo de empresas necesitarán previsiones financieras, para resolver este problema.

La competencia perfecta debe hacer frente a situaciones en que se combinan ambas situaciones. Estas situaciones se refieren principalmente a los precios agrícolas que dejados en un mercado libre y atomizado acostumbran a tener grandes oscilaciones, a la par que presentan a los compradores de productos agrícolas fuertes problemas financieros por concentrarse la compra-venta de las cosechas en un breve periodo de tiempo. Para solucionar este tipo de problemas financieros se recurre a la regulación de precios y a la financiación estatal (128).

Para que los precios puedan regularizarse, sin embargo, es condición indispensable que las existencias (stocks) puedan conservarse, es decir que se trate de bienes y productos no perecederos. En este caso cabe la posibilidad de retirar del mercado almacenando cantidades apreciables de productos en las épocas de precio bajo y venderlos de nuevo en épocas

(128) Ver LIPSEY, Richard G. libro citado en nota 125.

cas en que el precio sea alto. Esta actividad es clásica en la especulación con primeras materias. Las variaciones de caja pueden ser importantes a lo largo del movimiento especulativo (129).

e) Un modelo de conducta de la empresa. Para examinar si existe interdependencia entre los factores monetarios y reales en la conducta de una empresa debemos elaborar un modelo de comportamiento. En este modelo la empresa tomará sus decisiones después de considerar una serie de datos proporcionados por la contabilidad y el mercado. Estos datos son: 1º) situación de caja, 2º) nivel de ocupación de los factores, 3º) nivel de stocks de productos terminados, 4º) nivel de stocks de primeras materias, 5º) crédito concedido a los clientes y recibido de los proveedores, 6º) situación bancaria, 7º) coste medio (o en su caso coste marginal), 8º) precios de mercado, 9º) beneficios.

(129) Puede observarse que existe simetría entre los motivos para guardar dinero y los motivos para acumular existencias (stocks). Estos motivos son: a) transacciones. Se guardan existencias para que la corriente de entrada y salida de factores y productos no se interrumpa, b) precaución. Este motivo determinará la acumulación de existencias cuando las condiciones de aprovisionamiento sean inciertas o exista incertidumbre sobre las variaciones futuras de oferta o demanda, c) especulacion. Cuando se crea que puede existir posibilidad de realizar beneficios derivados de los movimientos futuros de precios. Ver las causas para mantener dinero en PRADOS, Jesús, libro citado en nota 5, paginas 208 y siguientes.



La lista de factores a tener en cuenta es bastante mas amplia que la que se desprendería de la versión marginalista de la teoría de la empresa. Como hemos visto en esta teoría la situación de caja no se tiene en cuenta, el nivel de ocupación tampoco porque será el óptimo; los stocks (existencias) no tienen un tratamiento independiente y las relaciones de crédito bancario y de proveedores quedan al margen por el supuesto tácito sobre los pagos. Estos se hacen todos al contado, contra entrega de factores y productos. Solamente los tres últimos apartados: coste medio o marginal (130), precios de mercado y beneficios son tenidos en cuenta.

Suponemos que la empresa trabaja con conocimiento suficiente de las condiciones óptimas de producción. Esto implica que sabe la cantidad de factores fijos y variables que debe utilizar para producir las cantidades diferentes de productos que cree oportuno producir, una vez conocido el precio de los factores. (Ver Cap. 4º)

Es necesario considerar como actuará esta empresa si se presentan oscilaciones en la demanda. Ya se ha dicho que si no puede acumular existencias (stocks) deberá vender todo su producto (salvo que destruyendo parte de él aumente los ingre-

(130) Ver HALL, R.L. y HITCH, C. J. "Price theory and business behavior", Oxford Economic Papers, nº 2 (mayo 1939) y MACHLUP, F. "Marginal analysis and empirical research", American Economic Review, sept. 1946,

sos) al precio de mercado.

Pero en el caso de poder guardar existencias puede venirle acumularlas en periodos de demanda baja para liquidarlas en periodos de fuerte demanda.

Si decide tomar esta decisión debe considerar cómo podrá resolver la necesidad de obtener dinero para seguir financiando la producción. Si las ventas han parado y las existencias (stocks) se acumulan no será posible emitir letras de cambio, que van ligadas a la venta efectiva. La empresa no podrá pedir al sistema bancario que cree dinero, esté este sistema, o no esté, en situación de expansionar la oferta monetaria. Por esta causa puede producirse una situación en que a la vez la banca disponga de posibilidad de ampliar el crédito y las empresas no estén en condición de solicitar el dinero disponible en el sistema bancario.

En estas condiciones la empresa debe encontrar un sistema para conseguir dinero a cambio de sus existencias inmovilizadas. El camino a seguir no es único. Se pueden sugerir algunas medidas a tomar sin pretensión de ser exhaustivos. Pueden ser tomadas las medidas expuestas, otras, o un conjunto coordinado de ellas.

Es posible que la empresa posea dinero acumulado por motivo de precaución y que pueda hacer frente a los pagos de compra de factores aunque la corriente de ingresos se deten-

ga. Si posee valores o bonos puede fácilmente liquidarlos. También puede liquidar otro tipo de activos no implicados en la producción (extra-funcionales)

Otra posibilidad consiste en reducir o detener la producción. Desde el punto de vista de la teoría marginalista esta decisión debería ser tomada si se creyera que los ingresos marginales no iban a cubrir los costes marginales variables. Sin embargo en muchos casos la producción se sigue, aunque no se venda, ya que se cree que cuando la conjuntura cambia se podrán vender a precio satisfactorio las existencias acumuladas, que vendidas en circunstancias desfavorables, como las que se suponen vigentes, tendrían que serlo a un precio que no cubriría los costes marginales variables.

Para poder seguir la producción en estas circunstancias y acumular existencias (stocks) no vendidas es necesario que existan medios financieros para ello, ya que la empresa deberá seguir pagando los factores de la producción que adquiera. Si estos medios financieros no se poseen la empresa deberá reducir su producción y despedir factores humanos y reducir compras de factores reales.

Por lo tanto nos encontramos ya con una decisión tomada por motivos financieros con independencia de consideraciones dictadas por los términos de demanda y oferta reales.

La empresa puede también, en este caso, forzar el crédito. Puede pedir créditos sobre su garantía general de pago. Por esta causa en los momentos de gran acumulación de existencias

(stocks) en el sistema económico, debería observarse por una parte disponibilidades monetarias en la banca y cierta tensión en otros mercados de préstamos.

Existen otras maneras de forzar el crédito en el sistema español, que bordean la legalidad. No por ello dejan de ser ~~menas~~ utilizadas. Una de ellas es el aplazamiento forzoso o voluntario de los pagos a proveedores.

El aplazamiento forzoso consiste en no pagar y no hacer frente a las obligaciones de pago cuando vencen, y el voluntario en pedir las con anticipación, mediante la renovación de letras de cambio y otros métodos. Puede pues esperarse si este punto de vista es correcto que la cantidad de devoluciones e impagos y aplazamientos aumente notablemente en los momentos en que las empresas estén acumulando existencias (stocks).

Otra práctica consiste en las llamadas "letras de favor" las cuales consisten en librar letras de cambios que no responden a una operación efectiva y son un sistema artificial y hasta ilegal de creación de crédito. Hay que esperar que en circunstancias de acumulación de stocks (existencias) también crezca el número de letras de favor.

Debe comprenderse que quizá fuera conveniente tener en cuenta que cuando se producen gran número de impagos y de suspensiones de pagos, conjuntamente con aplazamientos y le-

tras de favor, es síntoma de que el sistema necesita más dinero y no puede recibirlo a través de la oferta monetaria. Así pues estas situaciones patológicas del sistema de pagos y cobros, especialmente sus variaciones por encima o por debajo de la media, que pueden ser atribuidas a desarreglos financieros estructurales, actúan como una especie de muelle que permite asimilar a las empresas, desde el punto de vista del dinero, las oscilaciones cíclicas. Si este cojín creado por el propio sistema no existiera seguramente el número de suspensiones de pagos y quiebras por causas cíclicas sería mucho mayor del que se produce en realidad.

También hay que constatar que en nuestro país las dificultades de pagos y cobros, en cierta manera se transmiten. En general en situaciones monetarias difíciles existe por parte de las empresas una mayor receptividad para permitir el aplazamiento de pagos, con lo cual crean para sí mismas situaciones tensas de tesorería. Si estas circunstancias de caja les obligan a pedir también aplazamientos de sus pagos, podemos decir que la ampliación de los plazos de pago medios para todo el sistema aumentan durante los momentos de disminución relativa o absoluta del crédito bancario.

La política de precios no ha de suponerse necesariamente rígida. En épocas de poca demanda la empresa puede conce-

der descuentos, rebajar sus precios y proceder a liquidaciones, pero la otra hipótesis es también digna de consideración. En cada caso la actuación de una empresa tendrá elementos de ambas posturas, quizá concederá descuentos pero tampoco perderá de vista sus intereses a largo plazo.

Si deseamos comprobar de un modo práctico cual de las dos hipótesis corresponde más a la realidad debemos examinar lo que ocurre a los precios en los periodos del ciclo en que el nivel de la actividad es decreciente. Si las empresas mantienen precios estables y no se producen grandes cambios está ocurriendo que la empresa provee que podrá vender sus productos excedentes y acumulados en un tiempo futuro, si las disminuciones de precios son radicales estará procediendo a un ajuste de acuerdo con una óptica de muy corto plazo.

La introducción de las existencias (stocks) en el razonamiento microeconómico permite definir un método mediante el cual la empresa puede determinar su conducta con relación al mercado. Podemos admitir la regla general siguiente. La cantidad ofrecida en un mercado depende del precio y de las existencias (stocks), y del dinero disponible para financiar su acumulación.

Otra de las medidas que puede tomar una empresa para equilibrar su situación de caja cuando esta sufre tensiones de

bido a la acumulación de existencias (stocks) de sus productos consiste en parar las compras de factores de la producción.

Esta medida puede descomponerse en dos acciones distintas. Por una parte puede disminuir sus existencias (stocks) de primeras materias muy por debajo de su nivel habitual y por otro detener la inversión real, para evitar los pagos que de ella se siguen.

La primera medida contribuye a deprimir más la demanda que en los momentos de acumulación de existencias (stocks) ya es débil y la segunda, quizá la más importante en su aspecto de influencia sobre las variables reales del sistema, contribuye a través del mecanismo del multiplicador a deprimir aún más la coyuntura.

Es necesario señalar que durante las acumulaciones de existencias (stocks) la empresa necesita fondos líquidos y por ello puede retirar cantidades destinadas a la inversión para trasladarlas al pago de las operaciones corrientes. (130-bis)

m) Las variaciones de los precios y las existencias (stocks). Durante todo el razonamiento anterior se ha mantenido hipótesis sobre la conducta de los precios que no es compartida suficientemente por la teoría marginalista. Para ésta si la demanda baja, el equilibrio debe ser conseguido a corto plazo mediante la disminución de los precios. El punto de vista

(130-bis) La empresa también necesitará más dinero por motivo de transacciones y de precaución cuando el nivel de precios aumente, lo cual es constante en un estado de inflación continua. Este motivo para mantener dinero líquido pugnará continuamente con el deseo de mantener la menor cantidad de caja posible por motivo especulación, ya que el valor del dinero se deprecia, con relación a otros activos.

mantenida en este ensayo es que la empresa puede estar intersada en mantener el equilibrio entre su demanda y su oferta a un plazo más largo, de modo que el precio iguale la oferta y la demanda a través de un periodo de tiempo, por ejemplo de uno a cuatro años, simbolicamente: (Ver Cap. 6º, h)

$$x = f(p, E, D)$$

x cantidad demandada; p, precios, E, existencias; D, dinero.

En situación de equilibrio de las existencias, estas tendrán el nivel necesario para asegurar las transacciones y su exceso será nulo. En estas condiciones la cantidad ofrecida sólo será función del precio, según la curva marshaliana típica. El dinero será neutral. El precio p es el precio de equilibrio según la regla marginalista en que el coste marginal iguala el ingreso marginal. Si a este precio se acumulan existencias la política de la empresa puede ser, o bien liquidarlas incurriendo en pérdida, o bien mantener el precio y dejar que se acumulen las existencias creyendo que se trata de una baja de demanda conyuntural o cíclica que será compensado por un exceso futuro de demanda. En este caso la empresa puede mantener una demanda de reserva como la señalada por Edgeworth (131) y mantener su ritmo normal de producción. Esto podrá hacerlo si dispone de suficiente dinero para financiar la acumu

(131) Ver EDGEWORTH, Francis Ysidro: "Mathematical Psychics" (An essay on the application of Mathematics to the Moral sciences) New York, Economic Classics, 1967.



lación de existencias (stocks). Si no lo posee deberá buscar una política de precios con las consiguientes pérdidas a corto plazo, o de reducción de la producción o de la inversión. El dinero ha dejado de ser neutral, influye sobre las variables reales: producto y ocupación e inversión.

Cual sea la política que prefiere una empresa debe de ser decidido mediante la observación de su conducta. Si a pesar de la acumulación de existencias los precios se muestran rígidos es que la empresa ha decidido, después de considerar la elasticidad de su demanda y la posición de sus competidores próximos, mantener los precios.

En la fase ascendente del ciclo, cuando las existencias comienzan a llegar de nuevo a su nivel normal, la empresa puede considerar seriamente de nuevo el aumentar los precios. Existe una razón fundamental para hacerlo. Durante la época de acumulación de existencias se han producido gastos financieros a causa del exceso de caja necesario y descuentos por ventas que han reducido los beneficios, y en el periodo de alza de la demanda la empresa recuerda que su objetivo es hacer máximo su beneficio, por lo tanto procurará aumentar el precio, siempre que la elasticidad de la demanda lo permita y sus competidores secunden su actitud.

Es posible comprobar este tipo de conducta examinando si las empresas aumentan sus precios a la salida de un ciclo de demanda.

Desde el punto de vista de la teoría económica la función de oferta antes expuesta permite a la empresa tomar sus decisiones de acuerdo con datos internos. Por ello la empresa puede regular su relación con el sistema económico a través de varios canales de comunicación; los precios, los stocks y el dinero. La empresa en este aspecto es un elemento estabilizador.

La empresa no necesita ningún "subastador" para conocer "el precio de equilibrio en el mercado", como a veces se supone en la teoría del equilibrio general (132), tiene su propio precio interior que intenta imponer al mercado, siempre que éste se lo permite. Si el precio de mercado es superior al propio la empresa tendrá una renta neta, si es inferior a lar go plazo deberá desaparecer, pero antes podrá intentar sobrevivir durante bastante tiempo.

n) La acción de la oferta monetaria. Si desde el punto de vista de la empresa, pasamos al punto de vista de la autoridad monetaria, podremos contemplar como ésta puede influir directamente en los flujos de caja de las empresas. El sistema monetario se supone que se encuentra dirigido por un Ban

(132) Ver NEWMAN, Peter: "The theory of exchange" Englewood Cliffs Prentice Hall, 1965. Cap. III

co Central el cual puede regular a través de operaciones de mercado abierto, de coeficientes de liquidez, por simple racionamiento u otros medios, el crédito que concede la Banca Privada (133). Esta a su vez está ligada a las empresas a través de la compra de letras de cambio, y mediante la concesión de créditos con garantía de la capacidad general de pago. La banca puede también comprar bonos y acciones de las empresas pero estas operaciones supondremos que son atípicas y las examinaremos en el apartado relativo al mercado de capitales.

La empresa considera la venta de letras de cambio a la banca como parte de sus ingresos regulares de dinero. Toda decisión de un banquero de reducir la cantidad de letras aceptadas al descuento altera las condiciones de liquidez de una empresa.

Ha de considerarse, como se ha comentado en epígrafes anteriores, que esta alteración del flujo de caja se inscribe en una situación de las magnitudes reales de la empresa. Si sus necesidades de dinero a través del ciclo, fueran constantes podría predecirse sin lugar a muchas dudas los efectos de una política contractiva -

(133) Ver KIESCHEN, E.S. y colaboradores: "Política Económica contemporánea", Oikos-Tau, Vilasar de Mar, 1965.

del crédito. La empresa debería restringir su producción y aminorar sus inversiones. Si esta misma política restrictiva se produce durante una fase de acumulación de existencias, los efectos se amplían notablemente dado que al menor flujo disponible de dinero se debe añadir la mayor necesidad creada por las nuevas circunstancias. Si en cambio la restricción del crédito se efectúa en los momentos en que la empresa está liquidando "stocks", su efecto tiende a dificultar la marcha expansiva, pero más bien es moderado.

En resumen, pues, la influencia que puede ejercer la autoridad monetaria a través de la regulación de la parte de la oferta monetaria que se crea y destruye mediante la venta de letras de cambio a los bancos, puede tener una influencia directa sobre las magnitudes reales: compras de factores, capacidad empleada, e inversión de la empresa.

En estos supuestos el dinero deja de ser neutral, en la teoría de la empresa.

Este mismo fenómeno puede estudiarse para situaciones inflacionistas. En este caso para financiar una misma cantidad de venta de productos físicos a precios crecientes se necesitará una cantidad cada vez mayor de dinero. Por esta razón, a mismo volumen físico de productos

vendidos, pero a diferentes precios, el valor de las letras de cambio que financian esta venta mediante su venta a la Banca, será mayor en el caso de mayores precios. La cantidad de descuento que debe proporcionar la banca para financiar el mismo producto nacional real aumenta en la misma proporción que el nivel general de precios. Si además año tras años se produce un aumento del producto nacional real, los aumentos de líneas de descuento para transacciones normales deben aumentar también en una cantidad proporcional al producto nacional real, además del aumento monetario.

En una economía en expansión inflacionista el disminuir el crédito disponible es una medida poco frecuente, pero por las circunstancias expuestas si disminuye la tasa de crecimiento, el efecto puede ser idéntico a la disminución en caso de estabilidad.

Si la banca desea animar a la empresa para que expansione sus actividades puede establecer condiciones favorables de crédito pero estas no serán suficientes si la demanda no vuelve a una situación normal. En general la empresa ante condiciones favorables para vender letras y obtener créditos puede reanudar sus compras de existencias de primeras materias y volver poco a poco a considerar proyectos de expansión (inversión)

abandonados o restringidos durante la época de dificultades financieras. Pero tal vez pase algún tiempo antes de que las condiciones de caja se hayan restablecido y en muchos casos la empresa necesitará créditos a más largo plazo para financiar compras de factores duraderos.

o) El equilibrio del sector a corto plazo. A través de un periodo conjuntural desfavorable, cuando la demanda cede y se acumulan las existencias (stocks), algunas empresas se encontrarán con descubiertos de caja, y no podrán hacer frente a sus obligaciones de pago. Esta razón las conducirá a su desaparición. ¿Podemos decir, como se afirma en la tesis marginalista, que desaparecerán las empresas menos eficaces, o sea aquellas que tienen el coste mas elevado?. Esta afirmación sería cierta si la corriente de caja estuviera solamente determinada por factores reales. Como la empresa - puede tener estructuras financieras más o menos sólidas, y con ello queremos decir mayor capacidad para conseguir dinero en efectivo cuando lo necesita y diversas condiciones de crédito de proveedores y crédito a clientes, no es seguro que desaparezcan las empresas del mercado sólo por causas reales, o sea por su poca eficiencia relativa. Las empresas pueden llegar a la sus-

pensión de pagos y a la quiebra por deficiencias financieras. Siempre es posible que una empresa muy eficaz con un coste medio muy favorable esté completamente financiada con crédito a corto plazo y que desaparezca - cuando este disminuye.

p) El nivel de pedidos como regulador alternativo.

Hasta este momento se ha utilizado como regulador e indicador de la situación interior de una empresa al nivel de existencias (stocks) de productos terminados. Un razonamiento análogo es posible para aquel tipo de industrias cuya producción no está estandarizada, como pueden ser las grandes fábricas de barcos (astilleros) y otros tipos análogos. Para este tipo de fábricas la cartera de pedidos puede cumplir el mismo papel de indicador que las existencias (stocks) en las fábricas - con productos estandarizados.

En los servicios sirve un regulador de capacidad futura contratada.

q) El crecimiento de la empresa a largo plazo. El problema del crecimiento a largo plazo se examinará - primero para un solo producto. A corto plazo la empresa maximizará su producción con una cantidad de recursos líquidos dados, con ello alcanzará una dimensión

determinada por sus posibilidades de capital líquido. A largo plazo se debe suponer que debe de obtener todos los recursos liquidos necesarios para variar su dimensión hasta acomodarla al mínimo coste medio a largo plazo. La teoría marginalista no presenta una atención especial al proceso de financiación de esta expansión (el caso de reducción es evidentemente más simple) del tamaño de la empresa. Como se supone un mercado de capitales perfectos podrá vender o acciones o bonos hasta conseguir el capital líquido que necesite para transformarlo en capital real.

En cuanto al funcionamiento del mercado de capitales no existe en principio ninguna asimetría que permita a las empresas con mayor patrimonio y garantía obtener mayores cantidades de dinero a crédito. Tampoco es obstáculo para alcanzar el equilibrio que las empresas coloquen sus beneficios en forma de autofinanciación en sus propias empresas, ya que la lógica económica nos dice que <sup>si</sup> el rendimiento esperado de estas inversiones fuera superior mediante colocaciones monetarias externas a la empresa estas serían preferidas.

En el mercado de capital líquido o monetario la tasa de interés selecciona las empresas que deberán obtener fondos. Vamos a suponer primero que no existen proyectos nuevos, es decir que nos encontramos en un estado estacionario (134). En este caso po

(134) Ver MEADE, J.E. "The stationary economy" (Vol. I. A principles of Political Economy), Unwin University Books, Londres, 1965.



demostramos suponer que gran parte de las inversiones se dedicarán a acomodación del tamaño de las empresas. Las empresas a través de una adecuación de sus costos que tenga en cuenta tanto las economías internas como externas (125) irán acercándose a su tamaño óptimo. En primer lugar aquellas cuya transformación sea más favorable para la sociedad, que serán aquellas que puedan pagar una tasa de interés mayor. Cuando estas inversiones se hayan realizado otras empresas cuya expectativa de beneficios sólo les permite pagar una tasa de interés menor, obtendrán los fondos necesarios, que no podrán ser colocados a una tasa más alta, para llevar a cabo sus inversiones. Llegando finalmente a realizarse las inversiones cuya rentabilidad sea muy baja, que serán las de menor interés social. Cuando el sistema se acerque al estado estacionario sólo se realizan inversiones en renovaciones de instalaciones amortizadas. Se habrán agotado todas las posibilidades de conseguir economías internas y externas, y las empresas que hubieran pedido prestado irán devolviendo sus créditos y se podrán refinanciar por el resto de sus deudas a tasas más bajas que las originarias. Al fin de este proceso podrá seguir existiendo una tasa de interés tan sólo si existen personas que desean anticipar su consumo y otras que desean aplazarlo.

En una economía que presente oportunidades nuevas de inversión por creación de nuevos productos, nuevos procedimientos, nuevas técnicas y el descubrimiento de nuevos recursos o cambios en

(135) Ver VINER, Jacob "Cost curves and supply curves", en Lecturas sobre la teoría de los precios", seleccionadas por Boulding, K.E. y Stigler, G.J. (ver "readings") y ELLIS, Howard, S y FELLNER, William, "Economías y deseconomías externas" (incluido en el mismo libro de lecturas). También para el efecto de las economías y deseconomías externas cuando la técnica no es constante ver "Two concepts of external economies", Journal of Political Economy, abril, 1954

el tamaño del espacio económico considerada como mercado las nuevas inversiones competirán con las inversiones de adaptación del tamaño de la planta. La tasa de interés volverá a servir como medio de seleccionar las inversiones que se ejecutan. Pero ahora - parte de los fondos irá a financiar inversiones nuevas y parte a inversiones de adaptación de tamaño.

Es evidente que si la tasa de interés es el 5% todas las inversiones cuya rentabilidad sea menor que el 5%, por ejemplo el 4,5 y el 4%, se quedarán sin realizar. En el esquema de estado estacionario llegaría un determinado momento en que estas inversiones, cuando se agotaran las que producen el 5%, se realizarían, pero si la posibilidad de nuevas inversiones no cesa puede ser que todas las inversiones cuya rentabilidad sea inferior a la tasa de interés de mercado no se lleguen a realizar jamás. Entre estas seguramente habrá un conjunto de inversiones de adecuación de plantas al tamaño óptimo. Estas quedarán condenadas a producir con tamaños de planta ineficientes, ya que el interés social por invertir se encuentra permanentemente en otras inversiones más urgentes, consecuencia de "innovaciones".

En este razonamiento debemos ahora abandonar el supuesto de que las empresas son pequeñas. En una sociedad capitalista de la segunda década del siglo XX, coexisten diversos tipos de mercado: entre ellos, monopolios.

Tanto el monopolio como el oligopolio pueden llegar a ser - mercados estables sin que la dimensión de las plantas sea la óp-

tima. Basta que entre los componentes del mercado agoten su capacidad a un precio remunerativo y que las pérdidas de una guerra económica para desplazarlos no compensen de los beneficios - que se derivarian de la posesión del mercado con una planta óptima (136).

Sin embargo desde el punto de vista de la consecución de re cursos líquidos en un mercado de capitales la posición del monopolio y del oligopolio con relación a la competencia perfecta es dispar . El monopolio o el oligopolio tienen para sus inversiones, expectativas de beneficios mayores que las empresas de compe tencia perfecta. Por esta causa pueden pagar intereses más altos. Nos encontramos pues con una situación a largo plazo un tanto dis tinta de la descrita por los marginalistas. En una economía en - crecimiento en donde coexisten sectores en forma oligopólica y en competencia perfecta o monopolista, no parece existir ningún tipo de garantía teórica para creer que ni el oligopolio ni la compe tencia perfecta proporcionen, si coexisten y la economía es una economía de crecimiento, un tamaño óptimo de la empresa por sí mismos.

Parece pues que la autoridad monetaria puede tener en la con cesión de créditos y en la canalización del ahorro una oportunidad

(136) Ver SYLOS-LABINI, Paolo "Oligopolio y progreso técnico" Vilasar de Mar, Oikos-Tau, 1966. PRADOS ARRARTE, Jesús, muestra en el libro citado en nota 125 que el monopolio en caso de costes medios decrecientes a largo plazo puede ser más ventajoso que la libre competencia, aunque genere beneficios unitarios permanentes, lo cual no ocurriría a largo plazo con la libre competencia.

de intervenir en el sistema, que sea justificada. Sin embargo esta misma oportunidad puede ser utilizada si se hace erróneamente para alejarlo aún más de su estado óptimo

---

**Capítulo 6.º—La discontinuidad en la  
definición del equilibrio  
general de cambio. Con-  
cepción dinámica (multi-  
período) de este equilibrio  
con referencia a los pro-  
blemas de clasificación y  
transmisión de informa-  
ción.**

"Con referencia a la sociología y a la antropología, es manifiesto que la importancia de la información y comunicación como mecanismos de organización supera al individuo y afecta a la comunidad. En cierto modo es imposible entender las comunidades sociales, como las de las hormigas, sin una extensiva investigación de sus medios de comunicación."

Norbert Wiener:

"Cybernetics", capítulo I.

C A P I T U L O    6º

=====

LA DISCONTINUIDAD EN LA DEFINICION DEL EQUI-  
LIBRIO GENERAL DE CAMBIO, CONCEPCION DINAMICA,  
(MULTIPERODO) DE ESTE EQUILIBRIO CON REFEREN-  
CIA A LOS PROBLEMAS DE CLASIFICACION Y TRANS-  
MISION DE INFORMACION.

ooooo

6.- a La empresa en su entorno. Las decisiones de producción las toma la empresa teniendo en cuenta un conjunto de circunstancias que imperan en su entorno. (137) Estas circunstancias se reflejan concretamente en un sistema de precios y en unas disponibilidades de factores para la aplicación de unas técnicas de producción, históricamente conocidas.

En el capítulo 5º se ha examinado las consecuencias de la existencia de una Autoridad Central, la cual a través de la variación de los flujos de dinero puede influir en las decisiones de producción. Nos preguntamos ahora qué cantidad y qué tipo de información debe poseer esta autoridad sobre el sistema eco-

(137) Se ha traducido por entorno el termino inglés "environment" de difícil adaptación al español.

nómico para esperar que esta regulación tenga éxito.

Una hipótesis fundamental es la que ha dado lugar a la macroeconomía. Entre las variables agregadas del sistema existen relaciones funcionales estables, que se desarrollan en el tiempo. Algunas de estas variables, monetarias y fiscales, pueden ser controladas, eligiendo uno entre un conjunto de valores que pueden adoptar, con lo cual se regula el sistema.

Este ensayo dedicado a la microeconomía se pregunta si el hecho de la existencia y posibilidad de una regulación de este tipo se refleja en la teoría del equilibrio general de cambio, en cuyo marco se desarrolla la teoría de la producción, para una empresa y para un sector. En el capítulo anterior se examinaba como las variaciones de la cantidad de dinero afectaban las decisiones de producción. En éste se examinará el reverso del mismo problema, o sea cómo puede saber, a nivel microeconómico, la Autoridad Central que su regulación ha tenido éxito.

El punto de partida de esta investigación será la teoría del equilibrio general, desarrollada por León Walras, y que constituye uno de los logros imperecederos en el campo del análisis económico. (138).

- (138) "WALRAS, León: "Elements of pure economics, or the theory of social wealth", traducción de William Jaffé, de la edición definitiva anotada y cotejada. G. Allen and Unwin, Londres 1965. Ver también PARETO, "Manuel d'Economie Politique" Tomo VII, de las obras completas, Droz, Genova, 1966, capítulo 6º. La versión más simplificada y sencilla de la teoría del equilibrio general aquí expuesta tiene su origen en CASSEL, Gustavo: "Economía social teórica", Aguilar Madrid, 1933 y especialmente se ha seguido el texto de ZEUTHEN, F., "Teoría y método en economía", Madrid, Aguilar, 1960.



Esta teoría ha tenido en años recientes un desarrollo formal importante que ha colaborado a perfeccionar el conocimiento de las condiciones matemáticas del problema en cuanto a sus aspectos de existencia y unicidad de las soluciones (139) y de las condiciones de estabilidad del equilibrio. (140)

En su aspecto práctico la teoría del equilibrio general ha sido de poca utilidad. Ha servido mayormente en su aspecto propedéutico para mejorar el conocimiento que poseemos del funcionamiento de un sistema económico. El advenimiento del socialismo en la Unión Soviética mostró sin embargo que la teoría ya había servido y podía servir como modelo para determinar las condiciones de óptimo económico de un sistema (141) y también sirvió de base para la discusión en torno a la posibilidad de la planificación central coactiva. (142)

El argumento fundamental que se opone a la viabilidad de la solución de unas ecuaciones del equilibrio general consiste en afirmar que el número de ecuaciones debe ser demasiado grande y que por lo tanto no es posible intentar su solución. Este será el punto de partida de nuestro análisis del problema.

- (139) Ver WALD, Abraham, "Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie" Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 7, 1936 y ARROW, J.K. y DEBREU, G. "Existence of an equilibrium for a competitive economy" Econometrica, nº 22, 1954.
- (140) Ver METZLER, Lloyd "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions" Econometrica, vol. 13, 1945 y un resumen de la cuestión en TAKASHI, Negishi "The Stability of the Competitive Equilibrium" A survey Article. Econometrica, vol. 30, 1962.
- (141) Ver LERNER, Abba P. "Teoría económica del control" principios de economía del bienestar, México F.C.E. 1951.
- (142) El libro editado por HAYEK, F.A. "Collectivist Economic Planning" con ensayos de HAYEK, F.A. PIERSON, N.G. von MISES, L., HALM, G., y BARONE, E. proporciona una visión de la polémica. Augustus M. Kelley, Nueva York, 1967

b.- El número de ecuaciones del sistema. En su forma algébrica el sistema se plantea para un número finito de partícipes, que pueden simbolizarse con el número  $n$ . Hallamos, pues, al principio del planteamiento una cantidad finita, que nos permitirá aplicar si es necesario una de las propiedades de los conjuntos discontinuos, examinar uno a uno los elementos del conjunto de partícipes e identificar su número.

A lo largo de este ensayo se supondrá que, como ejemplo, siempre que ha sido posible se han estimado el número de partícipes para un sistema hipotético, para, por medio de este ejemplo, calibrar la magnitud del problema.

Para poder contar el número de sujetos incluidos en el análisis hay que proceder previamente a su clasificación. En el equilibrio general se consideran dos tipos de sujetos: las unidades de consumo, formadas por una o varias personas, que aportan factores personales (trabajo) y reales (capital, tierra) a las unidades de producción mediante títulos (contrato de trabajo, propiedad, arrendamiento, préstamo, etc) ~~a las unidades de producción~~, y obtienen a cambio una renta en dinero, y las unidades de producción, que obtienen factores de la producción y los transforman en productos, que adquieren o bien otras empresas o bien los consumidores, pagándolos con dinero. El dinero constituye el intermediario del intercambio. (143)

(143) En la estricta concepción del equilibrio general este puede desarrollarse en primera fase, sin necesidad de dinero, con una mercancía distinguida llamada "numeraire" que tiene algunas, pero no todas las propiedades del dinero. Ver HICKS, J.R. "Value and Capital", Oxford, at the Clarendon Press, 2ª edición 1946. Se considera conveniente introducir aquí al dinero desde un principio.

Es una cuestión metodológica digna de ser considerada<sup>da</sup> si en la teoría del equilibrio general es conveniente o no lo es introducir desde el principio del examen del problema, a la Autoridad Central (fiscal, monetaria y de regulación de mercados).

En las condiciones institucionales actuales el Estado es parte activa en la determinación de las condiciones de equilibrio de la producción, por lo que parece razonable el examen sistemático previo de las relaciones de los dos sectores tradicionales: unidades de producción y de consumo con el Estado, como cuestión previa al ensamblaje del sistema, tanto en su aspecto de relaciones reales, como monetarias y crediticias.

b-bis. Un ejemplo hipotético. Para estudiar la magnitud de las cantidades que intervienen en el planteamiento de la teoría del equilibrio general se expondrá un ejemplo hipotético. Se supone un Estado, que dispone de un territorio, donde habitan 30.000.000 de personas, de las cuales trabajan 10.000.000, encuadradas en 2.000.000 de empresas y 7.000.000 de unidades de consumo.

Las anteriores observaciones se suponen realizadas el día 31 de diciembre de un año concreto. Es conveniente fijar esta fecha, porque las cantidades de estos conjuntos varían con gran rapidez.

Aunque estas cantidades son hipotéticas, puede resultar factible, y de hecho lo es, calcular para un país real las anteriores cifras, y sus variaciones por periodo de tiempo.

Estas personas se hallan inscritas en los Registros Civiles y en la Seguridad Social, las empresas registradas en los Registros Fiscales y las unidades de consumo pueden calcularse a través del número de hogares (viviendas).

Consideramos que el Estado (Autoridad Central) es único y que, a pesar de su posible división en Ministerios y Departamentos, forma una sola unidad.

c.- La variación del número de elementos del sistema. Al observar los anteriores conjuntos <sup>a través del tiempo</sup> podemos ver que el número de unidades de producción, de unidades de consumo y de personas cambia constantemente. En propiedad, pues, el número  $n$  de elementos de un sistema de equilibrio general no es un número fijo. Hay empresas que quiebran, otras cierran, otras nacen y comienzan sus actividades. Se realizan cada día nuevos matrimonios y hay nacimientos y defunciones. Este tipo de sistema que permite el cambio continuo de sus elementos componentes se denomina un sistema abierto. (144)

Cabe preguntarnos desde un principio si un sistema de un número fijo ( $n$ ) de ecuaciones puede realmente representar el desarrollo de este sistema y también, si la respuesta es positiva, cuáles son las consecuencias formales de este cambio en el número de elementos en el tratamiento del problema.

Una autoridad central que deseara aplicar el sistema de Walras, para determinar su conducta debería estar continuamente atenta y recibir información de estos cambios para saber qué es lo que realmen-

(144) Ver ASHBY, William Ross: "Introducción a la cibernética", Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires, 1960.

mente está ocurriendo en el planteamiento del sistema. En otras palabras no sólo debería estar continuamente atento a la solución del sistema, sino que también debería atender a su replanteamiento.

Es posible que la Autoridad Central decidiera que el planteamiento del problema, a causa de la inestabilidad del número de elementos del sistema, resulta tan difícil como su solución.

El responsable de la Autoridad Central podría decidir que es más conveniente observar los cambios en los elementos del sistema que perseguir su solución. Por ello podría disponer que se llevara un registro sistemático de todas las empresas que causan alta y baja en cada periodo de tiempo, y ordenar censos periódicos de la población.

d) Los elementos patrimoniales. Hasta ahora nos hemos referido a los elementos personales del sistema. Hay otro tipo de elementos: los patrimoniales, que también, para que <sup>el</sup> problema pueda ser abordado deben ser medidos en cantidades finitas, tal como se ha expuesto en el Capítulo 3.

Es interesante examinar cuál es la clasificación de estos elementos patrimoniales que es más común y útil a la economía. Se clasifican en tierra (recursos naturales), capital y productos. El capital es empleado por las unidades de producción y está heredado del pasado. Ha sido fabricado por el hombre. Puede hablarse también en nuestra sociedad de un capital heredado del pasado en poder de unidades de consumo, que adquiere cada vez más importancia.

Los productos pueden clasificarse en bienes de capital que pasará a posesión de las empresas y bienes de consumo que quedará en poder de los hogares.

Otro tipo de objetos jurídicos que son transmitidos como bienes son los títulos, que se transfieren con independiencia del bien, producto o factor que representan, como resultante del tipo de instituciones jurídicas típicas de la sociedad industrial capitalista.

En su aspecto económico los títulos representan reconocimientos de propiedad sobre una parte de un patrimonio (acciones), reconocimientos de la posesión jurídica de algún elemento patrimonial (arrendamiento, por ejemplo), o reconocimiento de entregas de préstamos de dinero (créditos) o de deudas, ya sean reales o monetarias.

Para poder efectuar una evaluación numérica del número de tipos de títulos existentes, clasificándolos en subtipos, es conveniente, como en otro tipo de elementos patrimoniales, fijar unidades discontinuas.

Descritos los tipos de elementos patrimoniales más comunes, pasaremos a efectuar una hipótesis para el ejemplo hipotético que se está desarrollando, sin ignorar que la definición de mercancía, ha sido objeto de un amplio debate y que actualmente con los

problemas de homogeneidad y con la creación sistemática de diferencias de productos, (145) presenta aún mayores dificultades. En principio se estimará que el número diferente de elementos patrimoniales del sistema hipotético que ponemos como ejemplo es de 3.500.000. (146)

e) Nuevas variaciones en el número de elementos del sistema.

Si en el apartado c) se comentaba que era difícil seguir el número de elementos personales del sistema, debido a los cambios constantes en su número, ahora corresponde comentar que estas variaciones también se producen continuamente, o para ser más precisos a cortos intervalos, en el número de productos que existen en el sistema. El número de 3.500.000 que suponíamos que era válido en un momento dado, cambia poco después.

La razón estriba en que aparecen nuevos productos (bienes de consumo y factores de la producción). El estudio de estos cambios puede hacerse de un modo sistemático e indicar las posibles variaciones futuras del sistema.

En el sistema <sup>teórico</sup> creado por J.A. Schumpeter para explicar el comportamiento del sistema económico <sup>real</sup> cuando aparecen nuevos productos y nuevos bienes de consumo (además de otros factores de

(145) Ver CHAMBERLIN, E. H. "The theory of monopolistic competition" Cambridge, Harvard University Press, 1950, 6ª ed. Traducido al español por Fondo de Cultura Económica.

(146) La cifra está tomada del libro de MORGENSTERN, Oskar, citado en la nota 67, página 38. El ejército de los Estados Unidos estima que debe tener existencias de 3.000.000 de tipos de bienes distintos, cantidad que ha sido aumentada en 500 mil más para cubrir tipos de bienes de poco uso militar.

de cambio) presenta una gran dificultad en ser tratado en forma matemática de un sistema de ecuaciones lineal, precisamente por el hecho de cambiar el número de bienes y el número de componentes del sistema de ecuaciones. (147)

Al quedar alterada la corriente de bienes y servicios que, según Schumpeter, es circular y se repite a sí misma, por la introducción de nuevos bienes y técnicas, se altera también el planteamiento del sistema, dificultando su tratamiento matemático.

f) Las funciones que determinan la conducta de los participantes.  
Las magnitudes que se han descrito hasta el momento, aunque de difícil conocimiento por ser muy grandes, pueden ser obtenidos por una Autoridad Central si dispone de medios suficientes. Si pasamos a considerar otro tipo de información necesaria al planteamiento del sistema: la información sobre funciones de utilidad (o de demanda) de los consumidores y las funciones de producción de las empresas, pueden surgir dificultades previas, antes del hecho del intento de su obtención, derivadas de los reparos lógicos sobre la posibilidad de obtener tal tipo de funciones.

En el sistema hipotético que estamos examinando cabe preguntarse si las funciones de demanda y de producción deben incluir estimaciones de la conducta de las unidades de consumo y de producción para cada uno de los 3.500.000 de bienes que hemos supuesto que existen en el sistema .

(147) Ver SCHUMPETER, Joseph A. "Teoría del desenvolvimiento económico" Fondo de Cultura Económica, México, 1963, 3ª edición. Traducción Jesús Prados Arrarte. El sistema de Schumpeter puede ser matematizado macroeconómicamente, aunque el autor no conoce una matematización microeconómica, precisamente de este sistema.



Por las razones expuestas en el Cap. 4º, es posible que la empresa no esté interesada en formular específicamente una función analítica de producción, por lo tanto no cabe esperar que esta pueda ser conocida siempre por una Autoridad Central.

Este tipo de información es la que puede resultar más difícil de obtener en el planteamiento de la teoría del equilibrio general.

g) ¿Qué hay que observar en un sistema en equilibrio?. Una Autoridad Central no estaría muy interesada en observar un sistema que produjera ~~correctamente~~ situaciones de equilibrio, por lo menos con intención de regular su marcha (148). Podría estar interesado en la contemplación intelectual del sistema pero difícilmente en su cambio. Si el sistema presentara propiedades de estabilidad, su mismo funcionamiento automático corregiría las pequeñas desviaciones que pudieran producirse accidentalmente en torno a los valores de equilibrio.

A efectos prácticos la respuesta a la anterior pregunta sería que una Autoridad Central no estaría, a efectos de control, interesada en observar el sistema.

En sentido contrario podemos afirmar que, si una Autoridad Central está interesada en conocer la situación de un sistema económico, es debido a que este sistema no está en equilibrio, o no está en el estado deseado por la Autoridad Central y ésta intenta regular-

(148) Una Autoridad Central podría estar interesada en intervenir en un sistema estacionario en equilibrio para conseguir que éste comenzara un periodo de crecimiento. Pero este ensayo se refiere a sistemas económicos que ya se encuentran en crecimiento.

lo (o sea dirigirlo hacia un estado deseado) mediante un control, que ejerce influencia en el estado del sistema.

Existen numerosas causas que mantienen a un sistema en estado de desequilibrio. Estas causas pueden ser debidas a elementos externos al sistema estacionario (nuevos productos, nuevos procesos, nuevos mercados, nuevas fuentes de aprovisionamientos y nuevas organizaciones de mercado) o a desajustes del propio sistema (variaciones del crédito, de las cosechas, rigidez de los salarios y los precios, expectativas erróneas, exceso de ahorro sobre la inversión posible, ilusión monetaria, etc).

Podemos sugerir a continuación que la teoría del equilibrio general, puede ser utilizada para describir el signo y magnitud de los desequilibrios que está sufriendo el sistema.

Una primera observación que ha sido ya realizada con anterioridad consiste en obtener relaciones sistemáticas de las empresas que comienzan o terminan sus actividades y de los tipos de productos que producen. Las relaciones de productos nuevos que salen al mercado y de los que se dejan de fabricar también orienta de la situación en este campo.

Pero un método más útil de observar los desequilibrios del sistema puede darse a través de las relaciones contables del sistema de equilibrio general.

Este contiene un tipo de ecuaciones contables que especifica

lo siguiente: Para cada una de las mercancías que son objeto de tráfico (3.000.000) el total producido será igual al total adquirido, fijándose un precio que equilibrará oferta y demanda.

Otra ecuación contable es la siguiente: Los precios que equilibren la oferta y la demanda permitirán a cada participante en el sistema establecer una ecuación de valor, de modo que, el valor de los bienes y servicios entregados al sistema, sea igual al valor de los recibidos (incluidos la compra de títulos y valores que traspasan fondos a los empresarios).

Estos precios tendrán la propiedad de que el beneficio de todas las empresas será nulo,

Ninguna de estas tres proposiciones parece que se cumple en las situaciones reales de una conjuntura económica.

Si ponemos en forma de tabla las ecuaciones contables podemos observar que es posible añadir y quitar elementos a estas tablas sin que el tratamiento se altere. (Ver tabla página siguiente)

Podemos preguntarnos: ¿qué ocurre si por alguna causa no se cumplen las ecuaciones contables del primer tipo, o sea aquellas que igualan la oferta y la demanda de cada mercancía?.

La respuesta será que algunos elementos del sistema deberán acumular o desacumular existencias (stocks). Podemos efectuar una hipótesis adicional válida solamente para los sistemas económicos

Tabla VI~~X~~-1

(Tabla en hoja anterior)

industriales. Esta hipótesis nos dice que en este tipo de sistemas las existencias (~~stocks~~) solamente son guardadas por las empresas.

Las variaciones en existencias (~~stocks~~) reflejan, pues, los desajustes de la situación de equilibrio y su observación sistemática en todas las empresas (2.000.000) es una medida muy conveniente para una Autoridad Central que se proponga intervenir en el sistema.

Aunque sería de desear que esta Autoridad Central pudiera tratar de regular adecuadamente cada una y el conjunto de las empresas, ésta es una situación, con los actuales medios de comunicación e información, suficientemente difícil para no ser emprendida.

La observación de las variaciones de las existencias (stocks) se lleva a cabo mediante una muestra del total de las empresas y en el marco de una clasificación sectorial. Esta clasificación es de suma importancia y debería considerarse su mejora y estudio de forma que estuviera compuesta por clasificaciones de tipo ar-

Cantidad llevada al mercado

Cantidad recibida después de la venta o la compra.

Dif. precios (+ o -)

Unidades  
economicas  
que acuden  
al mercado

1	2	3	.....	.....	.....	m
---	---	---	-------	-------	-------	---

$x'_1$	$x^2_1$	.....	$x^n_1$
$x'_2$	$x^2_2$	.....	$x^n_2$
$x'_3$	$x^2_3$	.....	$x^n_3$
.....	.....	.....	.....
$x'_m$	$x^2_m$	.....	$x^n_m$

Totales

$X_1$	$X_2$	.....	$X_n$
-------	-------	-------	-------

Precios

1	$p_2$	.....	$p_n$
---	-------	-------	-------

$y'_1$	$y^2_1$	.....	$y^n_1$
$y'_2$	$y^2_2$	.....	$y^n_2$
$y'_3$	$y^2_3$	.....	$y^n_3$
.....	.....	.....	.....
$y'_m$	$y^2_m$	.....	$y^n_m$

$Y_1$	$Y_2$	.....	$Y_n$
-------	-------	-------	-------

1	$p_2$	.....	$p_n$
---	-------	-------	-------

$\delta'_1$	$\delta^2_1$	.....	$\delta^n_1$
$\delta'_2$	$\delta^2_2$	.....	$\delta^n_2$
$\delta'_3$	$\delta^2_3$	.....	$\delta^n_3$
.....	.....	.....	.....
$\delta'_m$	$\delta^2_m$	.....	$\delta^n_m$

$\Delta_1$	$\Delta_2$	.....	$\Delta_n$
------------	------------	-------	------------

1	$p_2$	.....	$p_n$
---	-------	-------	-------

Ecuaciones contables:

1ª)  $X_i = Y_i + \Delta_i \quad i = (1, 2, 3 \dots n)$

2ª)  $\delta'_j + \sum \delta^i_j p_i = 0 \quad \begin{cases} j = (1, 2, \dots m) \\ i = (2, 3 \dots n) \end{cases}$

bol (tree) de modo que las industrias estuvieran divididas en sectores, estos en subsectores y aún se procediera, si fuera conveniente a nuevas particiones, ya que las cantidades agregadas presentan el riesgo de poder compensar errores y proporcionar descripciones de situación, que no se ajustan del todo a la situación de cada uno de los elementos de que se tomaron las cantidades para realizar la agregación.

El segundo tipo de ecuación contable, nos dice que el valor total monetario de lo comprado en el mercado debe ser igual al de lo vendido, para cada uno, y por ello para todos los participantes en el sistema. Esta ecuación contable no se cumple cuando hay ahorro o desahorro, en forma líquida, o cuando una empresa tiene beneficios o pérdidas. El control de todos los elementos del sistema debería fundarse en la información de cada una de las situaciones, pero esto sería difícil dado que el número de sujetos es muy elevado (9.000.000). Sin embargo, puede recurrirse de nuevo a un subterfugio, creando un sistema de observación indirecta a través de los movimientos de los saldos agregados de diversos sectores en el total de la Banca, ya que, con las actuales instituciones monetarias, se guardan practicamente casi todos los saldos monetarios en la Banca. (149).

Como se ha visto en el capítulo 5º, el proceso de control del sistema se efectúa a través de los cambios de tenencias de cantida-

- (149) Es posible sugerir que el análisis monetario que realiza en nuestro país el Banco de España, podría también contener con detalle las posiciones monetarias relativas de diferentes sectores privados (metalúrgico, textil, cemento, etc). Para ello bastaría que las empresas tuvieran una clasificación que permitiera a los Bancos españoles efectuar balances desglosados de movimientos por sectores. Esto no significaría atentar contra el secreto bancario, ya que no revelaría ningún saldo de una empresa en particular.

des de dinero, las cuales influyen sobre las decisiones de compra de productos y de factores y, con un lapso de tiempo, sobre los equilibrios de oferta y demanda, que reflejan las primeras ecuaciones contables.

Tampoco puede afirmarse que la condición de equilibrio que determina que los beneficios son igual a cero, se cumpla en todos los casos. Por ello es conveniente también observar los beneficios que obtienen las empresas, en cada uno de los sectores, ya que su observación sistemática puede ofrecer una base para el análisis ~~sistemática~~ de los sectores de la economía, con hipótesis adecuadas sobre las causas y efectos futuros de las diferencias, de beneficio entre empresas y sectores.

h) La demanda como una función multiperiodo. ¿Qué significado podría atribuirse a la afirmación siguiente: "la autoridad central resuelve el sistema de equilibrio general de cambio"?

La solución consistiría en determinar los precios de los factores de la producción y de los productos de tal modo que se cumplirían las condiciones señaladas anteriormente (apartado g).

Podríamos imaginar que un "subastador", después de calculados los precios de equilibrio, los anuncia a los sujetos del sistema para que estos realicen el intercambio. (150)

(150) Ver NEWMAN, Peter "The theory of exchange" Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (capítulo 4), 1965.

**Paro:** ¿quedaría el problema resuelto de un modo definitivo después de que un "subastador" (ya fuera un ordenador o una Autoridad Central) anunciara los precios de equilibrio?. A partir de este momento se presentaría otro problema. Cada uno de los sujetos del intercambio debería encontrar a los otros sujetos con quienes proceder a cambiar las mercancías y servicios. La solución completa no se alcanzaría hasta que se hubieran determinado inequívocamente para cada uno de los sujetos, los otros sujetos con quien iba a efectuar el intercambio. La dificultad de fijar estas relaciones se hace patente para un planificador coactivo que quiera determinar completamente todos los detalles del funcionamiento del sistema.

Afortunadamente las relaciones entre sujetos económicos no se determinan generalmente para un solo periodo. Los contratos de trabajo, la propiedad, el arrendamiento y otras formas jurídicas aseguran la demanda para periodos de tiempo bastante largos.

En el caso de que no existan relaciones contractuales a largo plazo, las relaciones que se establecen entre proveedores y clientes en los mercados son lo suficientemente estables para que las empresas puedan aceptar una ley del sistema económico actual: la demanda en un periodo diferirá poco de la que se ha manifestado en periodos anteriores. (151)

- (151) Para una mayor fundamentación de esta ley puede verse el anterior trabajo del autor de este ensayo: CALLEJA, Carlos "La teoría de la utilidad", la lógica de la elección del consumidor bajo el axioma de discontinuidad. Grafisa, 1968, Apéndice A.



La anterior afirmación se deriva del siguiente supuesto.

Los consumidores para maximizar su utilidad y las empresas para maximizar sus beneficios efectuarán unas demandas de productos y factores, las cuales serán atendidas por otras unidades del sistema, especialmente empresas. El total de las demandas para una empresa derivado de este tráfico, para varios periodos de tiempo, sufrirá cambios, pero estos cambios serán lo suficientemente pequeños y se producirán siguiendo un tipo de tendencia y de ciclo, que permitirá la predicción razonable de la demanda futura en el tiempo, en función de los valores alcanzados en el pasado.

Esta proposición puede expresarse en notación matemática del siguiente modo:

$$D(t) = f ( D(t-1), D(t-2), \dots D(t-n)H).$$

Esta función no indica que la causa de la demanda sea el tiempo, sino que las causas que influyen en la demanda que recibe una empresa para cada uno de sus productos son suficientemente estables para que su variación en el tiempo sea relativamente predecible.

Esta relación funcional es susceptible de ser verificada económicamente (152) y por ello es del tipo de las que puede ser refutada empíricamente en el marco de una empresa. De resultar como se presupone la anterior relación bastante estable, podría constituir una buena base para una microeconomía empírica.

(152) Ver por ejemplo: HOUTHAKKER, H.S. y TAYLOR, Lester: "Consumer Demand in the United States: 1929-1970" Harvard University Press, 1966 y RAMBOZ, A. "L'ordonnement" Editions de l'entreprise moderne! Paris, 1963 (Anejos, I, II, III). La anterior relación deja de ser válida cuando una empresa comienza sus operaciones o cambia el producto. Lo cual indica que la demanda no depende del tiempo, sino que se da en el tiempo.

La estabilidad de esta función (a semejanza de la función de demanda de dinero de Friedman) significa que puede identificarse las variables de que depende, en cada caso particular, y que conocidas estas variables puede conocerse con un grado de precisión aceptable, el valor de la función. La función se mueve en el tiempo con un ciclo y una tendencia que la empresa puede identificar. Con ello queda aclarado que no se postula la constancia de las cantidades demandadas, sino la constancia de la función que las determina, en virtud de variables identificadas que son peculiares de cada empresa. (153) A estas variables les hemos denominado: H.

Al establecer sus movimientos en el tiempo, se postula para esta función un cierto grado de continuidad(en el tiempo) para los valores que genera.

No hay que suponer que las previsiones de una función de este tipo sean perfectas. Sólo se presupone que proporcionan una guía suficiente para orientar la producción, y los cambios de capacidad de la empresa. Un cálculo erróneo de la función conducirá a situaciones de desequilibrio, que, caso de no poder ser corregidas, pueden llevar a la empresa a crisis de adaptación, y a su desaparición. (154)

Supondremos que la empresa calcula esta función de demanda con los precios que le proporcionarían un beneficio fijado de antemano

(153) Ver "AMERICAN MANAGEMENT ASSOCIATION" "Métodos Prácticos de previsión de ventas", Gestión Deusto, Bilbao 1964, GARCIA ECHE-  
VARRIA, S. "Planificación y pronóstico en la economía de la empresa" ICC, Ediciones Madrid, 1. Ver también bibliografía en "Panoramas contemporáneos de la teoría económica" III Asignación de Recursos, Alianza Editorial, 1970.

(154) A través de la ecuación de caja. Ver Cap. 5º g)

El beneficio puto puede ser nulo en el caso de competencia perfecta y puede determinarse según datos de series históricas temporales en otros tipos de mercado. De este modo la empresa puede calcular un precio "interno" (total medio) que acompañe a las estimaciones de demanda realizadas. Con ello es posible la planificación de sus actividades, ya que las estimaciones de demanda serán a la vez en cantidades físicas y monetarias.

Si la empresa puede conocer la evolución cíclica, estacional y conjuntural de su función de demanda, a través de sus registros pasados ("memoria") y ha adquirido experiencia para efectuar hipótesis sobre lo que ocurrirá en el futuro, puede adoptar una política de precios distinta, que regule la producción a través del ciclo.

Una de las formas de actuar puede consistir en el abandono de la política de precios "miope", que adapte continuamente la conducta a las variaciones de estos precios, con su consiguiente cambio. Por el contrario una empresa (y el conjunto de ellas) pueden influir sobre los precios acumulando y desacumulando existencias (stocks) de modo que su conducta con relación a la demanda este regulada por la tendencia y no por el ciclo de la serie temporal de demanda. (Cap. 5º-m)

Por las razones expuestas es conveniente reconocer que el conocimiento experimental y directo de cada una de las empresas y cada uno de los sectores, por las personas que tienen encomendada la responsabilidad de su gestión es conveniente para poder fijar las funciones de demanda expuestas, cuyo conocimiento no sólo depende de las series temporales y de factores de caracter general (precios y rentas) sino de un conjunto de factores particulares, en número pequeño y finito (H) identificables por el experto.

Es conveniente subrayar que para un tratamiento empírico del sistema de equilibrio (o de relación) general, la anterior función de demanda en el tiempo puede sustituir con ventaja, al ser determinable empíricamente, a las funciones de utilidad o de demanda que son corrientes en esta teoría, ya que es el resultado observable de dichas funciones en la empresa.

También es conveniente señalar que la función multiperiodo de demanda es una función que presupone que se posea memoria de lo que ha ocurrido en el pasado, ya que hay que conocer los valores que tomó la demanda en tiempos pasados. El estado del sistema deberá ser fechado, con lo cual según la definición de Hicks, se producirá un sistema dinámico.

i) Nota sobre las relaciones macro-micro. Quizá puedan hacerse algunas reflexiones finales que sintetizen lo expuesto. Es problemático que, por la dificultad de conocer las ecuaciones, por su número excesivo, y por el cambio frecuente del número de ecuaciones, el sistema de Walras pueda ser resuelto, quizá ni siquiera pudiera llegarse a plantearlo.

En cambio puede comprobarse que los precios actúan como un mecanismo de regulación, semejante al que ha descrito la cibernética, (155). El sistema, precisando más, las unidades del sistema, corrigen automáticamente su situación y se adaptan a los cambios que les son manifestados a través de información numérica.

(155) Ver TUSTIN, A. "The mechanisms of economic systems", Heinemann, Londres, 1953 y LANGE, Oskar "Introducción a la economía cibernética", Siglo XXI, Madrid, 1969

El mecanismo adaptativo sirve igualmente para regular el cambio en el número de productos, procesos y elementos del sistema. La asimilación de este cambio se ve facilitada por su velocidad. Si examinamos lo que periodo tras periodos sigue siendo igual en el sistema económico, o lo que ha cambiado, veremos que si el periodo es corto (por ejemplo tres meses) la mayor parte de los elementos del sistema permanecen y el cambio es relativamente pequeño.

Pero observando el mismo sistema a lo largo de un periodo más dilatado (cinco a diez años) podemos constatar que, a pesar de producirse los cambios lentamente, un tipo de cambios parece repetir el mismo sistema económico (estado estacionario), mientras otros tipos lo alejan de su posición inicial <sup>(desarrollo)</sup>. J.A. Schumpeter describe así este proceso: (156)

"Los cambios continuos que pueden transformar con el tiempo por pasos infinitesimales, una tienda sin importancia en un gran almacén, caen bajo el análisis "estático". Pero éste no puede predecir las consecuencias de alteraciones discontinuas en la manera tradicional de hacer las cosas; tampoco puede explicar el porqué de tales revoluciones productivas, ni los fenómenos que les acompañan".

Sin embargo en microeconomía seguimos interesados en destacar que los elementos de regulación (el sistema de precios) adapta tanto al sistema económico un tipo de movimiento como otro.

(156) SCHUMPETER, J.A., libro citado en nota 147, página 73.

Si un observador desea examinar el sistema se encontrará con la gran dificultad de que es demasiado grande. Saberlo todo le va a ser muy difícil. Tendrá que observar entonces el sistema mediante el sistema estadístico de muestras, tomando sólo parte de la información, y acudir a números índices y agregados, es decir a formar unas pocas magnitudes representativas.

El observador puede verse tentado de intervenir en el sistema, si encuentra un método para ello, y la justificación para hacerlo. Una justificación válida, entre muchas, consiste en que el sistema no cumple los objetivos que se le asignan, en grado suficiente.

El método puede ser la coacción, o bien, a través de las variaciones en los flujos de dinero (política fiscal o monetaria) y la regulación de los precios, modificar los datos de los elementos que autoregulan sus posiciones de acuerdo con los datos del sistema. Estas modificación obliga a generar respuestas diferentes a las que se darían sin las manipulaciones de la autoridad central.

Si entre las cantidades agregadas, números índices, o estimaciones derivadas de muestras, existen leyes que permitan predecir los movimientos de las cifras agregadas, índices y estimaciones, y permitan estudiar los posibles estados del sistema que se producirían con diversos valores de las magnitudes que sirven de reguladores (cantidad de dinero, impuestos, etc) la Autoridad Central puede tener una magnífica ayuda.

Esta es una posibilidad que puede ser contrastada empíricamente y que está siendo explorada.

Otra posibilidad consiste en mejorar los métodos de producción y transmisión de información. Tanto el Estado (Autoridad Central) como los elementos del sistema necesitan determinar quién, cuál y cuándo debe entregarse información. Esta es en cierto modo distinta de la que se produce normalmente para adoptar decisiones razonadas en el proceso de regulación interna de la empresa, y aún existen numerosos obstáculos institucionales, técnicos y de falta de comprensión de la naturaleza del problema que obstaculizan el que la información necesaria para un mejor conocimiento del estado del sistema sea transmitida adecuadamente.

Los ordenadores electrónicos y las redes de teleproceso pueden cambiar los medios técnicos de producir, transmitir y procesar información, pero quizá sea también necesario comprender claramente la necesidad de poseer este servicio como un servicio social, y también aprender a manejar técnicas adecuadas a la naturaleza de la información creada por el hombre. Lo que dijo Einstein del Señor: "El Señor es sofisticado, pero no malicioso", no puede aún decirse del hombre. La mentira, el "bluff" y la ocultación deliberada forman parte del modo como el hombre maneja la información. (155). Pero el hombre también es capaz de descubrir las falsas informaciones en el marco de un sistema, cuyas informaciones llegan por varios caminos.

(155) Esta inscripción se encuentra en el Hall de la Universidad de Princeton, según la información de Oskar Morgenstern en el libro citado en nota 67.

## APENDICE MATEMATICO



APENDICE MATEMATICO 1º  
=====

CONJUNTOS, ORDENES y APLICACIONES.

ooooo

AM - a. Conjuntos. Un conjunto sera concebido de una manera intuitiva como cualquier colección de objetos entendida como un todo y en la que los objetos llamados elementos del conjunto, puedan ser pensados por separado con una individualidad propia.

Queremos expresar al hablar de la individualidad de cada elemento, que es posible dar alguna regla que permita con razonable seguridad distinguir cada objeto de entre los demás y saber por tanto si forma parte o no del conjunto.

Por ejemplo no consideraremos válida la especulación sobre colecciones como la formada por los presu~~rs~~<sup>os</sup> habitantes de

~~Marte~~

pues no existe ninguna regla que nos permita de un modo terminante dirimir si un ser cualquiera es o no es un elemento de la colección, y nos permita distinguir un individuo de otro.

El problema de elaborar tales reglas no es de orden matemático. Tal definición debe estar encomendada a las disciplinas particulares, las cuales tienen que decidir cuáles son las unidades más conveniente para el análisis (p. ej. unidades de producción, de consumo, Gobierno, territorio, persona, clase social, etc.) y cuáles son las clasificaciones más convenientes de estas unidades y sus interrelaciones.

Parece, pues, conveniente subrayar que antes de aplicar las operaciones matemáticas fundamentales de contar y medir debe efectuarse una tarea previa lógica de clasificación y definición. Solo cuando está ésta completamente realizada puede comenzar con propiedad la aplicación de la lógica matemática, cuyas operaciones más corrientes van a ser descritas aquí, comenzando por las más simples de atribución de un elemento a un conjunto, y de inclusión de un conjunto en otro.

Los problemas de definición de la unidad, entendiéndolo por tal la facultad del intelecto de pensar a través de unidades de su propia creación y el problema de la clasificación, es un problema lógico que escapa al ámbito de la matemática, y que no será abordado en este Apéndice.

b.- Definiciones de un conjunto. Una vez establecidas las reglas que permiten incluir o rechazar un objeto, arbitrariamente definido por la razón, en un conjunto podemos examinar como se puede conseguir una definición de dicho conjunto.

Los procedimientos que pueden seguirse son dos: el primero es el enumerativo. Podemos definir un conjunto dando a conocer cuales son sus elementos. Así podremos definir el conjunto de las vocales del idioma español: a, e, i, o, u. Se acostumbra a adoptar una notación que encierra entre paréntesis todos los elementos del conjunto:

Vocales del idioma español : (a, e, i, o, u)

En el Capítulo 6º se ha definido, por ejemplo, el conjunto de todos los participantes en un sistema económico.

No obstante en ciertos casos un conjunto no puede definirse enumerativamente so pena de agotar todos los símbolos y quedamos cortos, o bien que el conjunto sea infinito.

Un ejemplo del primer tipo es el caso en que queremos definir: todos los sonidos que el hombre puede emitir en una sola emisión de voz. Es posible que estos sonidos no estén codificados completamente y que la clasificación no alcance a todos. Sin embargo, aplicando el principio de la discontinuidad, debemos examinar si la clasificación es suficiente para abarcar la descripción fonética con suficiente precisión. En este caso aunque el conjunto no puede definirse enumerativamente puede tener un equivalente que a efectos prácticos es suficiente.

Un ejemplo de conjuntos infinitos es el expuesto en el capítulo 2, formando por todos los números naturales:

(1, 2, 3, 4, 5, 6. . . . .)

En este caso debe adoptarse una definición extensiva en la que se suele utilizar un signo lógico especial, que es el siguiente:  $(\supset)$ , y se lee: "tal que". Así el anterior conjunto admitiría la siguiente definición:

$(x \supset x \text{ es un número natural})$

que se leería del siguiente modo: "conjunto de ~~cosas~~ x "tales que" x son números naturales".

En matemáticas es, a veces, <sup>difícil</sup> definir conjuntos como el anterior de un modo genético, señalando una regla como pueden irse formando los nuevos elementos a partir del anterior. En el caso de los números naturales basta con definir el primero o uno y sumar uno a cada uno de los anteriores.

Genericamente la anterior definición equivale a decir:

$(x \supset x \text{ satisface la propiedad P})$

lo cual designará un conjunto siempre que la letra P designe una propiedad concreta. Existen dos cautelas a señalar sobre este tipo de definiciones.

La primera es la falsa definición en que aparentemente se

está señalando a algo, sin hacerlo realmente. Este es el caso de la siguiente proposición:

$$(x \mid x \text{ es un elemento de este conjunto})$$

que no señala a nada ni a nadie.

Otro tipo de cautela debe tenerse con el conjunto de todos los conjuntos. En principio no existe ningún obstáculo en formar conjuntos cuyos elementos sean otros conjuntos. En este ensayo así se ha hecho cuando se han definido los vectores de la producción, que son elementos del campo de elección, que a su vez son conjuntos de números naturales que miden las cantidades de factores de la producción. (son números naturales bajo el axioma de discontinuidad absoluto).

Al definir el conjunto de todos los conjuntos debe tenerse cierta prevención, ya que pueden surgir paradojas lógicas o antinomias de las cuales la teoría intuitiva de conjuntos no ha podido librarse. Por ello ha sido necesario recurrir a una formulación más estricta o axiomática, o a teorías especiales como la de los tipos lógicos de Russell. (A-1) Un ensayo a la vez elemental y dotado de suficiente rigor acerca de este tema puede leerse en el libro de Kazimierz Kuratowsky citado en la bibliografía. Es fundamental al hablar del conjunto:

$$(x \mid x \text{ es un conjunto})$$

A-1. La bibliografía de este capítulo va citada de modo genérico en el apéndice bibliográfico.

no considerar jamás conjuntos que sean elementos de sí mismos.

c.- Conjuntos Universal y cero.(vacío). Cuando penetramos en un contexto científico determinado, en nuestro caso el económico, puede ser muy conveniente determinar todos los objetos que van a formar parte de este campo científico acotado, concreto. Siempre parece razonable aspirar a acotar de alguna manera el universo del discurso, o de la investigación que estamos realizando, aun a sabiendas que existen otros objetos que no forman parte del conjunto que estudiamos. Este es fundamentalmente el problema de la definición del objeto de la ciencia, que suponemos superado. En este caso puede llegar a definirse el conjunto de todos los objetos que intervendrán en nuestra teoría. Este conjunto es el que los lógicos denominan Universo, que consta de todos los elementos de los que se habla. En el capítulo 6º se ha tratado de la posibilidad de acotar estos objetos para la teoría económica del equilibrio general de cambio.

Al acotar el Universo debemos de nuevo considerar el modo como podemos definirlo. Si podemos señalar uno a uno los elementos estaremos ante un universo finito, si esto no es posible, no necesariamente el universo debe ser infinito, pero puede ser "muy grande". Este es seguramente el caso de los universos de objetos económicos.

El conjunto de todos los elementos de que se va a hablar se suele representar por la letra U, y se le denomina conjunto Universal.

Al poder definir un conjunto como los elementos que tienen determinadas propiedades, puede darse la circunstancia que no se pueda señalar ningún objeto que las posea. Así si decimos: el conjunto de personas que pueden correr cien metros en menos de nueve segundos, este conjunto aspira a designar a alguien de modo muy concreto, mientras que, de momento, no parece existir ninguna personas que cumpla estas condiciones. Es un conjunto vacío que no tiene ningún elemento.

Este conjunto se designa con la letra escandinava  $\emptyset$ . El conjunto vacío equivale al cero de las matemáticas.

d.- Operaciones con conjuntos. Dentro de un Universo (U) definido caben varios conjuntos distintos. La operación más elemental es la de examinar si un elemento pertenece o no a dicho conjunto definido en el Universo.

Sea por ejemplo el conjunto de las vocales:  $(a, e, i, o, u) = V$ . La letra a pertenece a este conjunto, mientras que la m no pertenece. Con notación matemática esto se expresa así:

$$a \in V$$

$$m \notin V$$

siendo los signos  $\in$  y  $\notin$  los que indican la pertenencia y no pertenencia.

Si ahora examinamos dos conjuntos distintos podemos ver si el primer conjunto A tiene todos sus elementos incluidos en el segundo conjunto B. En este caso diremos que A está incluido en B o que es un subconjunto de B.

Un caso particular es aquel en que los elementos de A y B coinciden. En este caso hablaremos de igualdad de conjuntos.

Adoptando la notación matemática diremos que:

1º)  $A \subset B$                       2º) si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , entonces  $A = B$

que se lee: 1º) El conjunto A está incluido en el conjunto B.

2º) Si el conjunto A está incluido en el B y el B está incluido en el A entonces ambos son idénticos. (iguales)

Sea el siguiente ejemplo: El conjunto de las vocales débiles (i, u) está incluido en el conjunto de las vocales (a, e, i, o, u). El conjunto de vocales débiles y fuertes está incluido en el de todas las vocales, y viceversa. Por lo tanto los conjuntos son idénticos o son el mismo conjunto.

Desde un punto de vista científico es importante una vez determinado el Universo (U) de los objetos que van a ser examinados decidir cuáles van a ser los subconjuntos que tendrán interés desde el punto de vista de nuestra observación. La determinación de los subconjuntos constituye un sistema de clasificación. Así por ejemplo las empresas pueden ser clasificadas en sectores industriales de diferentes modos. Los consumidores pueden clasificarse en propietarios y no propietarios, etc. Un sistema de clasificación es pues fundamental para la observación numérica de un sistema, ya que el número como tal es una propiedad de los conjuntos.

Dado un Universo (U) es lícito comenzar examinando todos los subconjuntos que pueden formarse. El número de estos subconjuntos es



en el caso de conjuntos infinitos, igual a la potencia del continuo. El conjunto de todos los subconjuntos de un universo se la denomina potencia de U y se escribe del siguiente modo  $P(U)$ .

Una clasificación será, pues, una selección en el conjunto  $P(U)$ .

e) Algebra de conjuntos. Una vez se han definido diversos conjuntos parciales, en el contexto de un conjunto Universal U, es posible definir las siguientes operaciones:

Llamamos intersección ~~y~~ al conjunto de elementos comunes a otros dos: La intersección se escribe ~~de~~ siguiente modo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Llamamos unión al conjunto que contiene los elementos comunes y no comunes de otros dos : La unión se escribe del siguiente modo:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Llamamos complemento de A, al conjunto formado por aquellos elementos de U que no están en A.

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Las diferentes operaciones definidas están relacionadas entre sí a través del siguiente cuadro (leyes de Boole).

1	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
2	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
3	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5	$\emptyset \cap A = \emptyset$	$\emptyset \cup A = A$
6	$U \cap A = A$	$U \cup A = U$
7	$A \cap A^c = \emptyset$	$A \cup A^c = U$

Desde el punto de vista económico las operaciones de intersección y suma (o reunión) son importantes en el ámbito del establecimiento de una clasificación. Puede organizarse ésta por medio de subconjuntos fundamentales y especificar después nuevos subconjuntos que son intersección o reunión de los anteriores.

Por ejemplo: en la clasificación de industrias por sectores es posible que, al tomar como referencia para la clasificación el producto que se fabrica, las empresas multiproducto se hallen en varios sectores.

Así al definir, por ejemplo, las empresas que fabrican coches y tractores estamos realizando la intersección entre las que fabrican coches y las que fabrican tractores. Del mismo modo al examinar las que fabrican coches o tractores, estamos realizando la reunión o suma de ambos conjuntos.

e) Relaciones. En un conjunto de dos elementos  $(a, b)$  ninguna preferencia está establecida en favor de uno de estos elementos: Ni  $a$ , ni  $b$  están especialmente destacados. Hemos supuesto que  $(a, b) = (b, a)$ . (A-2)

La consideración de un nuevo conjunto  $(a, (a, b))$  nos permite poner especialmente en evidencia al elemento  $a$ . Por definición llamaremos par de elementos a todo conjunto en el cual uno de los elementos está particularmente distinguido. Al escribir :  $(a, b)$  queremos significar  $(a, (a, b))$ . En cierto modo y con esta definición, ya no es sostenible que  $(a, b)$  sea igual a  $(b, a)$

Llamaremos producto de dos conjuntos (notación  $A \times B$ ) al conjunto de pares cuyo primer elemento o elemento distinguido pertenece al conjunto  $A$  y cuyo segundo elemento pertenece a  $B$ .

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Cualquier parte de  $A \times B$  recibe el nombre de relación entre  $A$  y  $B$ . Es decir  $R$  es una relación entre  $A$  y  $B$ , si y sólo si  $R \subset A \times B$ .

Es más conveniente para su conexión con los problemas prácticos, como los expuestos en el capítulo 4º, abandonar esta terminología de las relaciones después de haber alcanzado su definición.

Se expondrá brevemente la nueva terminología y las causas de su adopción.

Las relaciones se expresarán con la siguiente notación:

$A R b$  en lugar de  $(a, b) \in R \subset A \times B$ .

El origen de esta notación se halla en el lenguaje y en el hecho de que en la vida real aparezcan numerosas relaciones. Expresiones como:

. . . "ser mayor que" . . . .  
. . . "ser indiferente a" . . .  
. . . "ser preferido a" . . .  
. . . "ser más caro que". . .  
. . . "ser igual a". . . . .

parecen tener la vocación de pedir a cada lado un par de elementos de un conjunto. Por ello es muchas veces conveniente establecer los elementos que pueden ir a ambos lados de la relación y examinar entre los pares ordenados de tales elementos los que realmente la cumplen.

Así queda justificado una doble visión de la relación.

Cuando se quiera poner de relieve el relator o elemento relacionante se escribirá,  $a R b$ , y si se quiere poner en evidencia los conjuntos que cumplen la relación se escribirá:  $R \subset (A \times B)$

Un tipo importante de relaciones es la que se dan en un mismo conjunto, es decir aquellas que se definen como  $R \subset A \times A$ . Este tipo de relaciones serán objeto de un comentario especial.

Pero antes debemos señalar que en la definición de la estructura económica y social de un sistema económico entran y se definen numerosas relaciones. Por ejemplo: ... "ser propiedad de....; .... deber a.....; ".....estar arrendado a.....", ..... estar trabajando en.....; ..... "ser heredero de".....; El tipo de relaciones posibles entre subconjuntos del universo del sistema económico, definen a éste y sus peculiaridades sociales.

Es conveniente señalar que gran parte de la regulación de estas relaciones está incluido en los estudios de esta Facultad, y forman, por lo tanto la base jurídica de la economía.

f) Lenguaje algébrico y metalenguaje. Podemos estar interesados en la descripción particular y detallada de un sistema en cuyo caso los conjuntos que cumplirán las anteriores relaciones serán, en el caso de ser personas, individuos concretos con nombres y apellidos, y en el caso de ser empresas: nombres comerciales.

También podemos estar interesados en estudiar tipos de relaciones en general. En este caso podemos acudir a la representación de los individuos concretos que cumplen las relaciones mediante un lenguaje algébrico: los;  $x$  que tienen arrendado el bien  $y$ , por ejemplo. Todos los  $z$  propietarios de casas. Este lenguaje algébrico es muy ventajoso en determinados casos, ~~pero~~

Sin embargo no debe, quizá, perderse de vista que el lenguaje algébrico aspira a poder convertirse en lenguaje particular siempre que sea necesario, y que el proceso de especificación de las variables algebraicas es fundamental para la viabilidad de la ciencia, y para la validez del lenguaje formal.

Por esta causa es seguramente conveniente que cuando en ciencia económica se estén especificando variables en forma algebraica, (x, y, z, v, p, r, t, por ejemplo) no se pierda de vista que se está señalando un conjunto real de objetos en el caso que se especifique la teoría. Estos objetos deben ser identificables claramente para poder aplicar y verificar la teoría.

Especial ventaja tiene el lenguaje algebraico-matemático. En este sentido la matemática tiene símbolos para objetos (x, y, z, por ejemplo) y para relaciones (x, +, -, =, %, f( ), :, etc.) y es indudable que constituye un lenguaje muy eficaz. Pero mientras la matemática puede disfrutar del privilegio de crear sus propios objetos, la economía no puede hacerlo, ya que los objetos le vienen impuestos exteriormente.

La aplicación pues del lenguaje algebraico-matemático es absolutamente necesario que se adopte después de la especificación y verificación de los conjuntos que los símbolos representan, para distinguir cuales son las propiedades de los conjuntos de las propiedades de los objetos matemáticos, que les representan.

La matemática no es un lenguaje autosuficiente, necesita completarse con otro idioma: por ejemplo, el español. Al decir: sea la función  $y = f(x)$ , utilizamos el lenguaje matemático ( $y = f(x)$ ) y un metalenguaje español ("sea la función").

Durante muchos años la matemática fué el metalenguaje o lenguaje complementario de la economía. En algunas escuelas contemporáneas de economistas matemáticos, especialmente anglosajones, la posición se ha invertido. El español, en su caso el inglés, es el metalenguaje, mientras que la matemática es el lenguaje.

Con ello se corre el riesgo de invertir los términos de la dependencia metodológica. Las propiedades de un modelo matemático brillantemente formalizado no son necesariamente las propiedades de ningún sistema económico real, por muy rigurosa y brillante que sea la matemática utilizada. Las deficiencias del lenguaje común permiten examinar las deficiencias de la concepción económica, quizá con mayor facilidad que las precisiones del lenguaje matemático. El autor de este ensayo desearía exponer su punto de vista sobre la total formalización de la economía. Es profundamente contrario a ella.

g) Equivalencias y Órdenes. Una relación  $R$  en  $A \times A$  es una equivalencia si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

- 1.- Reflexividad: Para cualquier  $a \in A$ ,  $aRa$
- 2.- Simetría: Para cualesquiera  $(a, b) \in A$ , si  $aRb$ , entonces  $bRa$
- 3.- Transitividad: Para cualesquiera  $(a, b, c) \in A$ , si  $aRb$  y  $bRc$ , entonces  $aRc$ .

Se acostumbra a designar la equivalencia con el símbolo:  $\sim$   
La expresión  $\sim a$  se lee "clase de a" y significa:

$$a = (x \mid x \sim a)$$

Llamaremos conjuntos disjuntos a aquellos que no tienen ningún elemento en común, ( $A \cap B = \emptyset$ ). Con esta definición es posible organizar los elementos de un conjunto A de modo que quede dividido en varios subconjuntos disjuntos que contengan todos los elementos del conjunto A. El conjunto de estos subconjuntos así creados se denomina conjunto de las partes de A y la operación descrita partición.

Hay que tener en cuenta para que la partición esté bien hecha que la intersección de las partes debe ser el conjunto nulo ( $A \cap B = \emptyset$ ), es decir que los elementos del conjunto de las partes deben ser subconjuntos disjuntos de A, y que cada uno de los elementos de A debe estar en algún elemento (subconjunto) del conjunto de las partes.

Si podemos organizar los conjuntos de las partes de un conjunto A, de modo que en cada subconjunto de las partes de A exista una relación de equivalencia, habremos conseguido un conjunto cociente de A, que escribiremos  $A/\sim$ .

Este ha sido sustancialmente el método utilizado para organizar la búsqueda de un máximo en el caso de discontinuidad. Se ha efectuado una partición de los conjuntos posibles o campo de elección, definiendo como equivalentes los conjuntos que produćían la misma cantidad de producto, con lo cual se ha formado un conjunto cociente por una relación de equivalencia de todos los vectores de producción posibles.



El método expuesto en el capítulo cuarto consiste en, dado un conjunto de vectores de la producción finitos, definido como campo de elección:  $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}) = V$  hemos inducido una partición del mismo mediante la relación de equivalencia: ...."produce la misma cantidad de producto que"....., con lo cual ha resultado el conjunto cociente siguiente:

$$(X_1, X_2, X_3)$$

en el cual los anteriores conjuntos son los subconjuntos de  $V$  siguientes:

$$\begin{aligned} X_1 &= (V_2, V_5, V_{10}, V_{11}) \\ X_2 &= (V_1, V_7, V_9) \\ X_3 &= (V_3, V_4, V_6, V_8) \end{aligned}$$

La segunda parte del método consiste en ordenar cada uno de los conjuntos  $X_1, X_2, X_3$  en virtud de la relación de orden: ..."ser de menor coste que...". Por ello es conveniente estudiar las relaciones de orden:

Una relación  $R \subset A \times A$  la llamaremos preorden si y sólo si es:

1º) No reflexiva:  $aRa$  implica no ser válida la relación.

2º) Transitiva: Para cualquiera  $(a, b, c) \subset A$  si  $aRb$  y  $bRc$  se cumple que  $aRc$ .

la llamaremos orden cuando además se cumple que:

3º) Antisimétrica: para cualesquiera  $(a, b) \subset A$  si  $aRb$  no se cumple  $bRa$ .

Relajando las condiciones 1ª) y 3ª) es posible definir una relación que se acomode tanto a la indiferencia como al orden, aunque en este ensayo se haya preferido la equivalencia y el orden estrictos.

También es conveniente reproducir la condición para que el orden sea total. Dado un conjunto  $A$ , diremos que existe orden total si para cualquier par de elementos y para todos ellos, se cumple que: o bien  $aRb$  o bien  $bRa$ .  $(a, b) \subset A$

A pesar del indudable interés que puede tener el orden parcial para otras cuestiones, tanto para el estudio del continuo numerico (Cap. 2) como para el método de conseguir maximos bajo la hipótesis de discontinuidad (Cap. 4) es más conveniente suponer solamente el orden total:

h) Elementos extremales. Suponemos que dado un conjunto  $A$ , existe un orden completo inducido por una relación que simbolizaremos por  $<$ . Todas las partes de este conjunto están también ordenadas, como consecuencia del orden total. Un elemento  ~~$x$~~   $x$  será llamado "mayorante" de  $A$  si es mayor que todo elemento de  $B$ . Analoga definición es válida para "minorante", pero al contrario. Como sinónimos de mayorante y minorante puede también utilizarse: "cota superior" y "cota inferior".

Por "máximo" del conjunto  $A$  entendemos aquel elemento del conjunto  $A$  que es mayorante de todos sus elementos. Por "mínimo" del conjunto  $A$  entendemos aquel elemento del conjunto que es minorante de todos sus elementos.

No todos los conjuntos completamente ordenados tienen un "máximo" entre sus elementos. Si el conjunto crece indefinidamente como ocurre con las aproximaciones a los números reales irracionales ningún elemento del conjunto llega a ser "máximo", aunque es posible que fuera del conjunto exista un número que sea un "mayorante" de todos los elementos del conjunto. El "mínimo" de los mayorantes que se conoce como "supremo", puede constituir un límite, que si bien tiene la propiedad de que puede llegar a diferir de un elemento de las series que definen un número irracional en una cantidad menor que cualquier otra, por arbitrariamente pequeña que se fije, también tiene la propiedad de que entre un elemento cualquiera de las series que definen el irracional y el límite existe un infinito número de términos de la serie.

Puede demostrarse que un conjunto finito de números racionales tiene un máximo.

i) Aplicaciones. Llamaremos aplicación, dados dos conjuntos A y B a una regla que asigne a cada elemento x de A un único elemento y de B. La relación  $x R y$ , indica que para todo x existe un y solo uno. Al conjunto A se le denomina dominio y al conjunto B imagen.

Vamos a examinar dos tipos de aplicaciones muy corrientes: las sobreyectivas y las inyectivas.

Dados dos conjuntos  $A = (a, b, c, d, e)$  y  $B = (x, y, z)$

diremos que la aplicación es sobreyectiva si todo elemento de B es transformado de alguno de A. En este caso será sobreyectiva la siguiente aplicación:  $(a, x); (b, y); (c, z); (d, z); (e, z)$ . en la que podemos observar que cada elemento de A tiene una y sólo una transformada en B, y todos los elementos de B tienen su correspondiente en A.

Llamaremos aplicación inyectiva a aquella que a dos elementos distintos de A corresponden dos elementos distintos de B. Sean los mismos conjuntos antes definidos. La aplicación siguiente:  $(a, x); (b, y); (c, z); (-, u); (d, t)$  es inyectiva, dado que a cada elemento de A corresponde uno y solo uno de B, pero existe en B el elemento: u que no tiene correspondencia en A.

Una aplicación sobreyectiva e inyectiva a la vez se denomina biyectiva o biunívoca, o uno uno, la cual tiene la propiedad de que a cada elemento de A corresponde uno solo de B y viceversa. (AM-2)

j) Óptimo y máximo. Si establecemos una relación biunívoca entre un conjunto de vectores como el  $X_1$ , <sup>ver pag. 17,</sup> y otro conjunto formado por el producto vectorial de cada uno de los vectores de  $X_1$ , por otro vector de su misma longitud, se habrá establecido un nuevo conjunto de escalares que será también finito. Podemos ordenar este segundo conjunto en virtud de una relación dada que permita su orden total. En virtud del principio de que todo conjunto de números racionales finito tiene un máximo, este nuevo conjunto tendrá un máximo. Llamaremos ópti-

mo, al elemento del conjunto  $X_1$ , imagen del valor máximo del conjunto de los escalares.

Sea, como ejemplo, uno de los subconjuntos de  $V$ , (ver apartado g), el  $X_1$  definido por los siguientes elementos ( $V_2, V_5, V_{10}, V_{11}$ ). Formaremos un conjunto de escalares multiplicando cada uno de estos vectores por un vector columna formado por los precios unitarios de cada uno de los factores de la producción que componen los vectores. En los casos en que sólo se utilice el factor durante un periodo de su vida, utilizaremos los rentales, o precios por unidad de tiempo.

Con ello podremos establecer una correspondencia biunívoca entre los vectores de  $X_1$ , y su escalar asociado  $V P'$ , que se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccc} V_2 P' & V_5 P' & V_{10} P' & V_{11} P' \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ V_2 & V_5 & V_{10} & V_{11} \end{array}$$

Los escalares  $V P'$  indican el coste de producción monetario de cada uno de los vectores de producción. Como estamos interesados en hallar el mínimo coste, los ordenaremos en virtud de la relación "...ser menor que..." o "ser de menor coste que". El máximo de este conjunto (escalar de menor coste) tendrá como correspondiente un vector que será el vector de factores de la producción óptimo.

k) El conjunto universal y la observación del sistema económico.

Dado un conjunto de elementos  $U = (a, b, c, d, e)$  que para determi-

nado campo científico suponemos que se trata de un vector universal, es decir, contiene todos los elementos que forman el conjunto observable. Deseamos observar la evolución de este sistema a través del tiempo, en momentos que denominaremos:  $T_1, T_2, \dots T_n$ , que indican periodos de tiempo finitos, que pueden ser idénticos o distintos.

Existe la hipótesis preliminar que la conducta de estos elementos puede estar relacionada, con lo cual efectuamos la hipótesis de que el conjunto forma un sistema.

Si a través de las diversas observaciones en diferentes momentos del tiempo aparecen nuevos elementos del sistema y desaparecen anteriores diremos que el sistema es abierto: Así el sistema escrito sería abierto si:

$$T_1 : U = (a, b, c, d, e)$$

$$T_2 : U = (a, c, d, e, f, g,)$$

o sea que se ha observado que ha desaparecido el elemento  $c$  y han aparecido los elementos:  $f, g$ .

Si el Universo de elementos sigue siendo igual a sí mismo el sistema se denominará cerrado.

Si definimos un vector numérico finito, asociado a cada uno de los elementos del sistema, diremos que el vector se denomina: vector de situación de un elemento del sistema.

Así el sistema definido por  $U$  tendrá los siguientes vectores de situación en el momento  $T_1$ :

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \rightarrow & U = & (a, & b, & c, & d, & e) \\ & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & & V_U = & (K_a, & K_b, & K_c, & K_d, & K_e) \end{array}$$

en la cual cada vector de situación es numérico y formado por un conjunto finito de números racionales:  $K_i = (3, 7, 27, 3/7, 9)$ , por ejemplo.

Es posible, pues, distinguir claramente en un sistema abierto entre cambios en los elementos del sistema y cambios en los vectores de situación de este sistema.

Entre los elementos del sistema pueden definirse relaciones características. Sean por ejemplo las relaciones en  $U$ , las siguientes:  $R = (D, P, A,)$ . Llamaremos cambios de estructura a los cambios fundamentales de relaciones entre los elementos del sistema.

Llamamos relaciones contables entre los vectores que determinan la situación del sistema, aquellas que pueden obtenerse mediante las operaciones aritméticas simples: sumar, restar, multiplicar y dividir, a partir de los conocimientos de los elementos y situación de un sistema en un momento dado.

Llamamos relaciones funcionales a las que ligan cantidades derivadas del estado del sistema en momentos distintos del tiempo.

Denominaremos atribuciones a los cambios en el estado del sistema inducidos por relaciones.

Una observación prolongada del sistema a través del tiempo puede permitir observar la velocidad de cambio de sus elementos: (número de elementos que cambian/número de elementos que permanecen). En este sentido el sistema económico tiene una baja proporción de cambio.

También puede permitir observar la estabilidad, o sea la permanencia, de las relaciones estructurales y de las atribuciones de ellas derivadas.

En conjunto, parece que la obtención de largos protocolos de observación suficientemente detallados del sistema económico, aun reconocimiento que es una tarea muy larga y que requiere una organización colectiva, es un requisito indispensable para poder enunciar leyes que ligan el estado del sistema en dos momentos del tiempo.

ooooo



## CONCLUSIONES

## CONCLUSIONES

=====

-----

En Economía el cálculo de situaciones óptimas, en que una función alcanza un máximo son de gran importancia. Las funciones de utilidad, de producción y de bienestar presentan valores máximos cuya determinación puede efectuarse mediante un método matemático fundado en la admisión de la hipótesis de continuidad. En el capítulo primero se ha indagado el origen histórico de ésta hipótesis desde los primeros esfuerzos intelectuales realizados entre los matemáticos, geómetras, filósofos y sofistas de la Grecia Clásica para captar los fenómenos de la cantidad y del movimiento.

Se ha hallado que a la hipótesis de continuidad, y como contrapunto, le ha acompañado siempre su contraria la hipótesis de discontinuidad, prácticamente en todos los momentos de la historia de este problema desde el ángulo matemático.

En el siglo XIX cuando la economía comienza a incorporar los métodos matemáticos, el cálculo diferencial e integral, fundado por Newton y Leibniz en el siglo XVII, ha llegado a una gran eficacia y reconocimiento y es una de las ramas más avanzadas de la matemática. Algunos fenómenos económicos, especialmente los cálculos marginales, sugieren el uso de esta matemática, que es incorporada como método

de análisis a la teoría económica. Su aplicación a la teoría de la producción mostró, sin embargo, la existencia de numerosas "indivisibilidades" y "discontinuidades" de los factores de la producción y de los productos, que obligaron a profundizar en el significado de la hipótesis de continuidad.

Dos tipos de aportaciones han modificado la concepción del problema. Una fué la definición y construcción de las series continuas, por Dedekind y Cantor, con el desplazamiento del énfasis de la noción de continuidad desde la función continua al campo numérico de los números reales. Otra fué la creación de un conjunto de algoritmos de matemática discontinua, finita o discreta, que han sido incorporados al instrumental analítico de la economía, siendo los más caracterizados la programación lineal y las ecuaciones en diferencias finitas.

Con ello la dicotomía continuidad-discontinuidad queda también planteada en el análisis económico.

---

Al quedar, después de Cantor, planteado el problema de la definición de continuidad en el campo numérico de los números reales se ha considerado lógico buscar también una definición de discontinuidad en alguno de los campos numéricos conocidos: enteros o racionales.

Por esta causa se han estudiado las series continuas, como series ordenadas, densas, compactas e infinitas, mientras que se han caracterizado las series discontinuas como series ordenadas, no densas y finitas, construyendo así la noción de discontinuidad.

Como ejemplo del primer tipo de series (continuas) se ha tomado el campo de los números reales, y como ejemplo del segundo tipo de series (discontinuas) conjuntos finitos de números racionales

---

En el capítulo tercero se ha definido la medida como la atribución de un número a una magnitud. Se ha examinado si existen razones para utilizar como conjunto, del cual han de ser tomados los números que servirán de medida, tanto las series continuas, como las discontinuas.

Se ha llegado a la conclusión que existe una gran probabilidad de que los números utilizados como medida práctica sean tomados de series discontinuas, dado que los instrumentos y métodos de medida no permiten aproximaciones infinitas. Se ha examinado también la posibilidad de construir para las medidas económicas, de las cuales se ha expuesto un sistema, tipos de series discontinuas para la medida de los factores de producción, que se hallen basadas en alguna convención de uso general. Se ha hallado que la introducción de un sistema métrico como el decimal y de una unidad monetaria mínima como los diez centimos, unifican para los participantes en el sistema económico español (y análogamente con las unidades métricas y monetarias vigentes en otro país) los saltos mínimos de las magnitudes en los conjuntos discontinuos. Con lo cual se ha comprobado que, practicamente, las medidas que se utilizan en la industria y el comercio están tomadas de conjuntos ordenados y finitos de números racionales, por ende discontinuos.

-----  
Las medidas que pueden utilizarse de cada factor de la producción si son medidos en campos numéricos discontinuos y tienen un mínimo y un máximo, forman un conjunto finito. El conjunto de todas las combinaciones posibles que pueden formarse con un número finito de factores de la producción, que aceptan ser medidos en campos numéricos discontinuos, es también finito.

Una propiedad de los conjuntos finitos consiste en que <sup>si</sup> pueden ser totalmente ordenados tienen un máximo. Este máximo es el elemento que domina a todos los demás en virtud de la relación de orden inducida en el conjunto. Para hallarlo es posible proceder inductivamente, es decir ir formando el conjunto ordenado completo emplazando en él uno a uno, todos y cada uno de los elementos.

Esta posibilidad no existe en el caso de conjuntos continuos porque el número de sus elementos es infinito.

Esta propiedad puede utilizarse para hallar el conjunto óptimo de factores de la producción que producen una cantidad dada de producto. Para ello habrá que identificar previamente el conjunto (finito) de todas las combinaciones de factores capaces de producir esta cantidad de producto. (clase de equivalencia). Después deberá calcularse su coste monetario, siendo el conjunto de factores correspondiente al coste mínimo, el óptimo para producir la cantidad de producto deseada.

Este método con ser lógicamente correcto sería muy laborioso si se

tuviera que aplicar tal como se ha descrito. Por ello se examinan un conjunto de criterios de convergencia que permiten identificar el conjunto óptimo sin tener que examinar uno a uno todos los conjuntos posibles. Uno de estos criterios consiste en un procedimiento de prueba y error a partir de un óptimo histórico conocido, que puede aplicarse mediante la partición del conjunto sometido a examen.

---

Un sistema económico, donde existan gran cantidad de bienes y factores de la producción "indivisibles" (discontinuos), verá facilitada su organización si se utiliza dinero en el intercambio. En las actuales circunstancias institucionales una Autoridad Central puede controlar la oferta monetaria, aumentando o disminuyendo la cantidad de dinero de que dispone el sistema económico para los cambios, aunque la actitud de los particulares y empresas guardando mayor o menor cantidad de dinero en su poder, es también un factor importante que altera el carácter mecánico de la relación dinero-precios.

La empresa verá reflejarse los cambios en la política monetaria en sus disponibilidades de caja, y su aumento o disminución afectarán a la cantidad de factores de la producción que adquiera y en el nivel de actividad que mantenga. También las posibilidades de conseguir préstamos, reguladas por la autoridad monetaria, afectarán a sus decisiones de inversión.

Por esta causa las decisiones de producción que se ven afectadas por

los precios relativos de factores y productos lo pueden también ser por las condiciones que fije la autoridad monetaria para obtener dinero en préstamo. Por este procedimiento la autoridad monetaria puede influir directamente en las decisiones de la empresa relativas a la adquisición de factores de la producción, aunque esta empresa, si llega a conseguir experiencia del carácter cíclico de su demanda, puede seguir políticas de precios que no signifiquen la igualdad de oferta y demanda de productos a corto plazo, sino la acumulación y desacumulación cíclica de existencias (stocks) sin movimientos de precios.

-----

Un sistema económico de equilibrio general del tipo Walras-Schumpeter está definido para  $n$  elementos, siendo  $n$  generalmente un número finito. Por lo tanto el sistema está definido por cantidades discontinuas, tanto de factores de la producción, como de productos, de unidades de producción como de unidades de consumo.

Una diferencia entre ambos tipos de sistemas es que el sistema de Schumpeter admite la introducción de nuevos elementos como: nuevos productos, nuevos procesos, nuevos mercados, nuevas fuentes de aprovisionamiento y de organización. En este caso el número  $n$  de elementos que forman parte del sistema varía con frecuencia y hace difícil su planteamiento matemático.

Sin embargo las ecuaciones contables para cada uno de los produc-

tos y para cada uno de los participantes siguen siendo válidas en ambos planteamientos (Malras y Schumpeter) y pueden permitir estimar las magnitudes del desequilibrio en que se encuentra el sistema, si son observadas a través de muestras.

En cambio las funciones de demanda y de producción son de más difícil obtención. Se avanza una hipótesis acerca de la posibilidad de considerar la existencia de una función de demanda para cada empresa (y dentro de ésta por productos) que se desarrolle a través del tiempo, como una serie temporal, que pueda permitir la estimación de su tendencia y sus ciclos, y que sea una función estable de un corto número de variables conocidas por la experiencia de cada empresa, además de las tradicionales de precios y rentas.

Se examinan las posibilidades de comunicación entre la empresa y la Autoridad Central, llegando a la conclusión final, y seguramente la más importante de este trabajo. Esta conclusión consiste en que las mejoras en la comunicación entre empresa y autoridad central reguladora del sistema, pueden colaborar a la mejor regulación de la economía.

Barcelona, abril 1971.



## BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

ooooo

- ACHER, Joan: "Algebra lineal y programación lineal", Barcelona, Muntaner y Simón, 1967.
- AGASSI, J.: Ver KLAPPHOLZ, K.
- AGAZZI, Evandro: "La lógica simbólica". Barcelona. Ed. Herder. 1967.
- AITKEN, A.C.: "Determinantes y matrices", Madrid, Ed. Dossat.
- ALBIZU ALBA, Manuel: "Introducción al análisis macroeconómico general" Madrid. 1964.
- ALCAIDE ICHAUSSI, Angel: "Análisis Input-Output", Madrid, Guadiana de Publicaciones S.A. 1968.
- "Lecciones de matemática moderna para economistas", Madrid, Copigraf, 1966
- ALCAUSA MARTIN, José : "El análisis del balance como fuente de información en el crédito bancario", Málaga, Tipografía Hispánica, 1970.
- ALCHIAN, Armen A. : "Cost and Outputs" en The Allocation of Economic Resources por Moses Abramovitz. Reproducido en "Readings in Microeconomics", ver BREIT y HOCHMAN en "Readings".
- "The meaning of utility measurement", America Economic Review, nº 42, 1953.
- ALLEN, R.G.D. : "Análisis matemático para economistas", Madrid, Aguilar S.A., 1959.
- "Economía matemática", Madrid, Aguilar S.A. 1965
- ANSOFF, H. Igor : Ver "Readings".
- "Toward a strategic theory of the firm", reproducido en "Business Strategy", ver ANSOFF en "Readings".
- APEL, Hans : "Marginal cost constancy and its implications", American Economic Review, nº 38, 1948. Reproducido en "Readings in Microeconomics", ver LAMERSCHEN en "Readings".

ARNAIZ GIL y PELAEZ VEGAS: "Matemáticas para economistas" (2 vols),  
Nuevas gráficas S.A. 1964.

ARROW, K.J.: "The economic implication of learning by doing", RES. 1962

ARROW, Kenneth J. y MC MANUS, Maurice : "A note on dynamic stability", Econometrica, nº 26, 1958.

— y DEBREU, G. : "Existence of an equilibrium for a competitive economy", Econometrica, nº 22, 1954.

— y HURWICZ, L. : "On the stability of the competitive equilibrium, I", Econometrica, nº 26, 1958.

— "Social choice and Individual Values ", John Wiley and Sons, 2ª ed., 1964.

— y HURWICZ, L. : "Some remarks on the equilibria of economic systems", Econometrica, nº 28, 1960.

ASHBY, William Ross : "Introducción a la cibernética", Buenos Aires. Ediciones Nueva Visión, 1960.

— "Proyecto para un cerebro", Madrid, Tecnos, 1960.

AUDOYE, Jean-Marie: "Les fonds de roulement", Entreprise Moderne d' Edition, Paris, 1970.

BAIN, Joe S. : "International differences in industrial structures, eight nations in the 1950s ", Yale University Press, 1966.

— "Pricing, distribution and employment, economic of an enterprise system", Nueva York, Holt and Co. 1953, ed. corregida.

BARBE DURAN, Luis : "Sobre una teoría general de sistemas", Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Económicas. Universidad de Barcelona, 1966.

BARONE, Enrico : "The ministry of production in the collectivist State", reproducido en "Collectivist economic planning", ver HAYEK, F.A. en "Readings".

BARRE, Raymond : "Economía Política", (2 tomos), Barcelona, Ariel, 5ª ed. 1967.

BAUDIER, E: "L'introduction du temps dans la théorie de l'équilibre général", Les cahiers économiques, diciembre, 1954.

BAUMOL, William J. : "Economic Theory and Operations analysis", New Jersey. Prentice Hall, Inc. (2ª ed.), 1965.

— "On the Theory of oligopoly", Economica, nº 25, 1958

— "The Cardinal utility which is ordinal". The Economic Journal, nº 68, 1958.

— y QUANDT, R.E. : "Rules of thumb and optimally imperfect decisions", American Economic Review, nº 54, 1964.

BAUVIN, Gerard : "L'informatique de gestion", Puteaux, Ed. Hommes et techniques, 1968

BAXTER, W.T. : "Inflation and accounts", Investment Analyst, nº 4, 1962

- BAXTER, W.T. y OXENFELDT, A.R. : "Approaches to pricing: economist versus accountant", Business Horizons, nº 4, 1961.
- BEAR, D.V.T. : "Inferior- inputs and the theory of the firm", Journal of political Economy, nº 73, 1965.
- BEALE, E.M.L. : "Survey of Integer Programming", Operational Research Quarterly, nº 16, 1965. Reproducido en "Programming for optimal decisions", ver MOORE y HODGES en "Readings".
- BEER, Stafford : "Cybernetics and Management", Londres, The English Universities Press, (2ª ed.), 1967.
- BELDA, E : ver FZ de TROCONIZ, A.
- BELLMAN, R.E. : "Introduction to matrix analysis", Mac- Graw Hill, 1960  
Hay traducción española en ed. Reverté.
- BERGSON, Abram : "The Economics of soviet planning", Yale University Press, 1964.
- BERTALANFFY, Ludwig von : "General system theory, foundation, development, applications". Nueva York, George Braziller, (3ª ed.), 1968
- BETH, E.W. : ver FIAGET, Jean
- BLAUG, Mark : "La teoría económica actual" Barcelona, Ed Luis Miracle, S.A. 1968
- BOEHM, George A. W. : ver en "Readings" C.O.S.R.I.M.S.
- BOHM-BAWERK, Eugen von : "Capital and Interest" (vol I: History and critique of interest theories, vol. II: Positive theory of capital, y vol. III: Father essays on Capital and interest), South Holland. Libertarian Press, 1959.
- BOOLE, George : "A treatise on the calculus of finite differences", Nueva York, Dover Publications, 1960.
- BOREL, Emile : "Space and time", Nueva York, Dover Publication, 1960.
- BOULDING, Kenneth E. : "Análisis económico", Madrid, Alianza Editorial, 9ª ed en español de la 4ª ed. norteamericana, 1967.
- "In defense of monopoly", Quarterly Journal of Economics, nº 59, 1945.
- "Teoría de los precios de mercado según la preferencia de liquidez", Economica, nº 9, 1944, traducido al español en STIGLER y BOULDING, "Ensayos sobre la teoría de los precios" en "Readings".
- director de edición: ver en "Readings" STIGLER y BOULDING.

BOWLEY, A.L.: "Mathematical groundwork of economics", Oxford, Clarendon 1924.

BOYD, D.F.: "Enterprise models: a new management technique", Industrial Management Review, nº 8, 1966.

BOYER, Carl B.: "The history of the calculus and its conceptual development, the concepts of the calculus", Nueva York, Dover Publications, 1959.

BRAITHWAITE, Richard Bevan "Scientific explanation, a study of the function of theory, probability and law in science", Cambridge University Press, 1968.

BREIT, William: ver en "Readings".

BRIGGS, F.G. y otros: "Les stocks et la gestion des stocks", Entreprise moderne d'édition. Paris 1970.

BROWN, F.H.S. y EDWARDS, R.S.: "The replacement of obsolescent plant", Economica, nº 28, 1961.

BROWN, R.G.: "Statistical forecasting for inventory control", Mc Graw-Hill, 1959.

BRUNBERG, Richard E.: "Ceteribus paribus for supply curves", The Economic Journal, nº 63, 1953, reproducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".

BUCHANAN, Norman S.: "Advertising expenditures: a suggested treatment", Journal of Political economy, nº 50, 1942.

BUCHANAN, J.M.: "Ceteris paribus: some notes on Methodology", Southern Economic Journal, nº 24, 1958.

CAMUZAC, Pierre: ver PIATIER, André.

CANNAN, Edwin: "Historia de las teorías de la producción y distribución en la economía política inglesa de 1776 a 1848". México. Fondo de Cultura Económica, 1948.

CANTILLON, Richard: "Ensayo sobre la naturaleza del comercio en general", México, Fondo de Cultura Económica, 1950.

CARLSON, Sune: "A study on the pure theory of production", Londres, Ping, 1939.

CARSBERG, B.V.: ver en "Readings".

CASSEL, Gustavo: "Economía social teórica", Madrid, Aguilar, S.A. 1933.

CASSELS, John M.: "Excess capacity and monopolistic competition", The Quarterly Journal of Economics, nº 51, 1937.

- CASSELS, J. M. : "On the law of variable proportions", reproducido de Exploration in Economics, Nueva York, Mc Graw-Hill, 1936, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", ver FELLNER y HALEY en "Readings".
- CASTANEDA, José: "Lecciones de Teoría Económica", Madrid (4ª ed), 1965
- CLAPHAM, J.H. : "Las cajas vacías económicas", The Economic Journal, nº 32, 1922. Traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de los precios", ver STIGLER y BOULDING en "Readings".
- CLARK, John Bates : "The distribution of wealth", Nueva York, Augustus M. Kelley, 1965.
- CLARK, J.M. : "The economics of overhead costs", Chicago. University of Chicago, 1923.  
— "Toward a concept of workable competition", American Economic Review, nº 30, 1940.
- CLARKSON, G.P.E.: ver en "Readings".
- COASE, R.H. : "La naturaleza de la empresa", Economica, nº 4, 1937, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de los precios", ver STIGLER y BOULDING en "Readings".
- COBB, C.W. y DOUGLAS, P.H. : "A theory of production" American Economic Review, suplemento, 1928.
- CONSO, Pierre: "La gestion financiera de la empresa", Ed. Hispano-Europea, 1970.
- COURNOT, Augustin: "Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas", Madrid, Alianza Editorial, 1969.
- COURT, Louis M. : "Entrepreneurial and consumer demand theories for commodity spectra", Econometrica, nº 9, 1941.  
— "Invariable classical stability of entrepreneurial demand and supply functions", The Quarterly Journal of Economics, nº 55, 1941.
- CULLMANN, G., DENIS-PAPIN, M. y KAUFMANN, A.: "Elementos de cálculo informacional", Bilbao. Ed. Urmo, 1967.
- CHACON, E.: "La investigación operativa. Programación dinámica", Madrid 1970, Ibérico-Europea de Ediciones.
- CHAMRADAL, Lucien: ver PIATIER, André.

- CHAMBERLIN, Edward H. : "La competencia monopolística y la teoría de la distribución según la productividad", en "Explorations in Economics. 1936, Traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de la distribución según la renta", ver en FELLNER y HALEY en "Readings".
- "Proportionality, divisibility and economies of scale", The Quarterly Journal of Economics, nº 62, 1948.
- "The theory of monopolistic competition", Cambridge, Harvard University Press, (6ª ed.) 1950.
- CHATTOPADHYAY, Paresh : "Diminishing returns and linear homogeneity: further comment", American Economic Review, nº 56, 1966.
- CHIANG, Alpha C. : "Fundamental methods of mathematical Economics"; McGraw-Hill Book Co. 1967
- DAMPIER DAMPIER-WHETAN, Guillermo C. : "Historia de la ciencia"; Madrid (1ª ed.) sin fecha.
- DANTZIG, Tobías : "Number, the language of science"; Doubleday (4ª ed. revisada y aumentada), 1953.
- DANTZIG, George: "Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities", incluido en "Activity analysis of production and allocation" VER KOOPMANS.T.
- DEAN, Joel: "Statistical cost functions of a hosiery Mill" Chicago. University of Chicago Press. 1941.
- "The Relation of cost to output for a leather belt shop", National Bureau of Economic Research, Nueva York, 1941.
- DEBREU, Gerard: "Representation of a preference ordering by a numerical function", cap. XI en "Decision processes" de THRALL, R.M., COOMBS, C.H. y DAVIS, R.L. , reproducido en "Readings in Mathematical Economics"; ver en NEWMAN, peter "Readings".
- "Théorie de la valeur, analyse axiomatique de l'équilibre économique", Paris, Dunod, 1966.
- Ver ARROW, J.K.
- DEFOSSE, Gaston: "La gestión financiera de las empresas"; Barcelona. Ariel, 1962.
- "Le commerce intérieur, données, évolution, structure, organisation", Paris. P.U.F. 1944.
- DENIS-PAPIN, M. Ver CULLINANN, G.
- DHRYMES, Phoebus J. : "On the theory of monopolistic multiproduct firm with uncertainty", International Economic Review, nº 5, 1964.

- DOBB, Mauricio: "Economía política y Capitalismo", México, Fondo de Cultura Económica (2ª ed. en español), 1961.
- "Ensayo sobre crecimiento económico y planificación". Madrid, Tecnos, 1970
- DORFMAN, R., SAMUELSON, P.A. y SOLOW, R.M.: "Linear programming and economic analysis". Mc Graw-Hill Book Co. 1958
- "Mathematical, or "linear" programming: a nonmathematical exposition", American Economic Review.
- DOUGLAS, P.H. : "Are there laws of production ?", American Economic Review, nº 38, 1948.
- Ver COBB, C.W.
- DOWNIE, N.M. "Fundamentals of measurement", Oxford University Press, (2ª ed.), 1967.
- ECHEVARRIA, Juan: "Teoría del dinero y del comercio internacional", Madrid Tecnos, 1963.
- ECKAUS, Richard S. "The factor proportions problem in underdeveloped areas", American Economic Review, nº 45, 1955.
- EDELBERG, V. : "An econometric model of production and distribution", Econometrica, nº 4, 1936.
- EDEY, H.C. Ver CARLSBERG B.V. en "Readings"
- EDWARDS, Edgar O. : "The analysis of output under discrimination", Econometrica, nº 18, 1950.
- EDWARDS, R.S. : "The pricing of manufactured products", Economica, nº 19 1952.
- Ver BROWN, F.H.S.
- ELLIS, Howard S y FELLNER, William: "Economías y deseconomías externas" The American Economic Review, nº 33, 1943. Traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de los precios" de STIGLER y BOULDING.
- EDGEWORTH, Francis Ysidro : "Mathematical psychics (an essay on the application of Mathematics to the Moral Sciences)" 1881. Nueva York, Economic Classics, 1967.
- EMERY, F.E. Ver en "Readings".
- ENCARNACION, J. : "Constraints and the firm's utility function", Review of Economic Studies, nº 31, 1964.



EVANS, G.C. : "Mathematical introduction to Economics", Nueva York, 1930.

ETAYO, José Javier: "Lecciones de matemática moderna", Madrid. Dirección General de Enseñanza Media, 1965.

EZEKIEL, Mordecai: "El teorema de la telaraña", The Quaterly Journal of Economics, nº 52, 1938, reproducido en "Ensayos sobre el ciclo económico", ver HABERLER, G en "Readings".

FAYOL, Henri: "Administration industrielle et générale, Prevoyance, organisation, commandement, coordination, controle", Paris, Dunod, 1950

FEIBLEMAN, J y FRIEND, J.W. : "The structure and function of organization" Philosophical Review, nº 54, 1945, reproducido en "Systems Thinking", ver EMERY en "Readings".

FELLNER, William: "Oligopolio, Teoría de las estructuras de mercado", México, Fondo de Cultura Económica, 1953.  
Ver ELLIS, Howard S.  
Ver FELLNER W. y HALEY, B.F. en "Readings"

FERGUSON, C.E.: "Microeconomic theory", Homewood, Illinois, Richard D. Irvin, Inc, (ed revisada), 1969  
"Substitution effect in value theory, a pedagogical note", Southem Economic Journal, nº 26, 1960.  
"The Neoclasical theory of production and distribution", Cambridge, at the University Press, 1969.

FERNÁNDEZ BAU, Carlos: "La descapitalización de las empresas", Barcelona, Ed. Hispano Europea, 1970

FERNÁNDEZ DIAZ, Andrés: "Introducción a la teoría de la planificación", Madrid, Textos C.E.U. 1969.

FERNÁNDEZ PIRLA, José M<sup>a</sup>: "Economía y gestión de la empresa", Madrid, (3<sup>a</sup> ed.), 1967.  
"Teoría económica de la contabilidad", Madrid, (5<sup>a</sup> ed.), 1967.

FZ. de TROCONIZ, A y BELDA, E. "Análisis algebraico", Bilbao, La editorial vizcaina, 1961.

FORSYTHE, George E. : "Solving a quadratic equation on a computer", reproducido en "The mathematical sciences, a collection of essays?", ver en C.O.S.R.I.M.S. en "Readings".

FORTENAY, Patrick B. de : "Diminishing returns and linear homogeneity: a comment" American Economic Review, nº 54, 1964.

FRANÇOISSE, Paul: "Psychologie du temps". Paris. P.U.F. (2<sup>ed.</sup>), 1967.

FRIEDMAN, Milton: "Teoría de los precios", Madrid, Alianza Editorial, 1966.

— "The methodology of positive economics", "Essays in Positive Economics", Chicago, University of Chicago Press, 1953.

— "The quantity theory of money: a restatement" en "Studies in the Quantity Theory of Money" (1956), reproducido en "Readings in Macroeconomics", ver MUELLER en "Readings".

— y SAVAGE, L.J. : "The expected-utility hypothesis and the measurability of utility", Journal of Political Economy, n° 65, 1952.

— y — "The utility analysis of choices involving risk", Journal of Political Economy, n° 61, 1948.

FRIEND, J. W.: Ver FEIBLEMAN, J.

FRISCH, Ragnar: "Annual survey of general economic theory: the problem of index numbers", Econometrica, n° 4, 1936.

— Las leyes técnicas y económicas de la producción. Barcelona, Sagitario S.A., 1963.

GANOR, A y LEARCE, I F. : "A new approach to the theory of the firm", Oxford Economic Papers, n° 4, 1952.

GALLI, Lui A. : "Algebra para economistas, Introducción al álgebra clásica" (1<sup>a</sup> parte), Buenos Aires, Ed. Macchi, 1963.

CASS, Samuel I. : "Linear programming, Methods and applications", McGraw-Hill, 1958

GEORGESCU-ROEGEN, Nicholas: "A diagrammatic analysis of complementarity" Southern Economic Journal, n° 19, 1952.

— "Fixed coefficients of production and the marginal productivity theory" (1935), reproducido en "Analytical Economics", ver GEORGESCU-ROEGEN en "Readings".

— "Limitationality, Limitativeness and economic equilibrium" (1955) reproducido en "Analytical Economics", ver GEORGESCU-ROEGEN en "Readings".

— "Two: Concepts, numbers and Quality", introducción de "Analytical Economics", ver GEORGESCU-ROEGEN en "Readings".

— Ver en "Readings"

GHOSH, A: "Experiments with input-output models", Cambridge University Press. 1964.

GOLDBERG, Samuel : "Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas", Barcelona, Marcombo S.A., 1964

- GOLDMAN, Marshall I. : "Soviet Marketing, distribution in a controlled economy", Londres, Macmillan Co., 1963.
- GOODFIELD, June: ver TOULMIN, Stephen.
- GOULD, J.R.: "Internal pricing in firms when there are costs of using an outside market", Journal of Business, nº 37, 1964
- GRANELL, Manuel: "Lógica", Madrid, Rev. de Occidente. 1949.
- GRANGER, Gilles-Gaston: "Formalismo y Ciencias Humanas", Barcelona, Ariel, 1965.
- GRANICK, David : "El hombre de empresa soviético , estudio sobre la organización en la industria rusa", Madrid, Rev. de Occidente, 1966.
- GRAYSON, Henry: "Price theory in a changing economy", Macmillan Co. 1965.
- GRUNBERG, E.: "The profit maximization assumption: comment", Oxford Economic Papers, nº 16, 1964.
- HARAKKUK, H.J.: "American and british technology in the nineteenth century (the search for labour- saving inventions)", Cambridge, University Press, 1967.
- HABERLER, Gottfried: Ver en "Readings"
- HADAR, Josef: "Elementary theory of economic behavior", Reading, Addison Wesley Publishing Co. 1966
- HAHN, F.H.: "On the stability of a pure exchange equilibrium", International Economic Review, nº 3, 1962.
- y NEGISHI, T.: "A theorem on non-tâtonnement stability", Econometrica, nº 30, 1962.
- HALEY, B.F. : Ver FELLNER, W y HALEY, B.F. en "Readings".
- HALL, R.L. y HITCH, C.J. : "Price theory and business behaviour", Oxford Economic Papers, nº 2, 1939.
- HAIM, Geog : "Further consideration on the possibility of adequate calculation in a socialist community", reproducido en "Collectivist Economic Planning", ver HAYEK, F.A. en "Readings".
- HANCOCK, Harris: "Theory of Maxima and Minima", Nueva York, Dover Publications Inc. 1960
- HARBERGER, A.C.: "Monopoly and resource allocation", American Economic Review, Papers and Proceedings, nº 44, 1954.
- HARDT, John P, HOFFENBERG, Marvin, KAPLAN, Norman y LEVINE, Herbert S. "Mathematics and computers in soviet economic planning", Yale University Press, 1967.

HARRODS, R.F. : "A further note on decreasing costs", Economic Journal, nº 43, 1933.

\_\_\_ "Law of decreasing costs" Economic Journal, nº 41, 1931.

\_\_\_ "Notes on supply", Economic Journal, nº 40, 1930

\_\_\_ "Scope and method of economics", Economic Journal, nº 48, 1938.

HAYEK, F.A. : "The nature and history of the problem" y "The present state of the debate", introducción a "Collectivist Economic Planning", ver en HAYEK, F.A. "Readings".

\_\_\_ Ver en "Readings".

HENDERSON, J.M. y QUANDT, R.E. : "Microeconomic theory: a mathematical approach", Nueva York, Mc Graw Hill Book Co. 1958. Hay traducción española, en Barcelona, ediciones Ariel, 1962.

HICKS, John R. : "A theory of economic history", Oxford University Press 1969.

\_\_\_ "Distribution, an economic progress", Review of Economic Studies, nº 3, 1936.

\_\_\_ "Examen anual de la teoría económica; la teoría del monopolio", Econometrica, nº 3, 1935. Traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de precios" ver STIGLER y BOULDING en "Readings".

\_\_\_ "Marginal productivity and the principle of variation", Economica (Febrero), 1932.

\_\_\_ "Revisión de la teoría de la demanda". México. Fondo de Cultura Económica, 1958.

\_\_\_ "The theory of wages", Nueva York, Macmillan, 1966.

\_\_\_ "Value and Capital", Oxford, Clarendon Press (2ª ed.), 1946.

HIRSCH, Werner Z. : "Firm progress ratios", Econometrica, nº 24, 1956.

HIRSCH, Hans : "Quantity planning and price planning in the Soviet Union" University of Pennsylvania Press, 1961.

HITCH, C.J. : Ver HALL, R.L.

HOCHMAN, Harold M. : Ver BREIT en "readings".

HODGES, S.D. : Ver MOORE, P.G.

HOSMALIN, Guy : "Investissements, rentabilité et progrès technique, Calculs prévisionnels du profit et rythme du progrès", Paris, Ed. Génin, 1956.

HOSPITAL, Marquis de l' : "Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes". Paris, (2ª ed.), 1715.

HOTELLING, Harold : "Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions", Journal of Political Economy, nº 40, 1932.

HOFFENBERG, Marvin : Ver HARDT y otros.

HOUTHAKER, H.S. : "Revealed preference and the utility function",  
Economica, nº 17, 1950.

HUNTINGTON, E.V. : "The continuum and other types of serial order", Nueva York, Dover Publications, Inc. 1963.

HURWICZ, Leonid : "Mathematics in economics: language and instrument".  
reproducido en "Mathematics and the social Sciences", Philadelphia, The American Academy of Political and social Science, 1963.  
Ver ARROW, Kenneth J.

ICHIMURA, S.A. : "A critical note on the definition of related goods"  
Review of Economic Studies, nº 18, 1950-51.

JEADICKE, Robert K. y SPROUSE, Robert T. : "Les flux financiers dans l'entreprise", Paris, "unod, 1970.

JEVONS, W. Stanley : "Money and the mechanism of exchange", Paul Kegan 1910.

— "The theory of political economy", Nueva York, Reprints of economic classics, (5ª ed.), 1965.

JOHNSON, Harry G. : "Monetary theory and policy", Surveys of Economic Theory, vol I, Macmillan, Londres, 1968.

JOHNSON, R.A., KAST, F.E y ROSENZWEIG, J.E. : "Systems theory and management", Management Science, nº 10, 1964.

JOHNSON, W.E. : "The pure theory of utility Curves", Economic Journal, nº 13, 1913.

JOLLEY, J.L. : "Data Study", Londres. World University Library. 1968.

JONES, Ronald W. : "The structure of simple general equilibrium models"  
Journal of Political Economy, nº 73, 1965.

JUREEN, Lars : Ver WOLD, Herman o. A.

KAHN, H. y WIENWER, A.J. : "The next thirty-three years: a framework for speculation", Daedalus, American Academy of Arts and Science, Boston, nº 96, 1967.

KAHN, R.L. : Ver Katzd.

KALDOR, Nicholas : "The determinateness of static equilibrium", Review of Economic Studies, 1934, nº 1.

- KALDOR, Nicholas: "La imperfección del mercado y el exceso de capacidad", Economica, nº 2, 1935, traducido al español en "Ensayos sobre teoría de los precios", ver STIGLER y BOULDING en "Readings".  
— "The equilibrium of the firm", Economic Journal, nº 44, 1934.
- KAPLAN, Norman: Ver HARDT y otros.
- KAREL BOON, Gerard: "Factores físicos y humanos en la producción", México, Fondo de Cultura Económica, 1970.
- KASNER, Edward y NEWMAN, James: "Mathematics and the Imagination", Nueva York. Simon and Schuster, 1956.
- KAST, F.E.: Ver JOHNSON, R.A.
- KATZ, D. y KAHN, R.L.: "Common characteristics of open systems", cap. 2º del libro "The social psychology of organization", Wiley, 1966, reproducido en "Systems Thinking", EMERY en "Readings".
- KAUDER, Emil: "A history of marginal utility theory", Princeton, Princeton University Press, 1965.
- KAUFMANN, A. : Ver CULLMANN, G.
- KEMENY, John G.: "The social sciences call on Mathematics", reproducido en "The Mathematical sciences, a collection of essays", ver en C.S.R.I.M.S. "Readings".  
— , SNEEL, J.L. y THOMPSON, G.L.: "Introduction to finite Mathematics", Nueva York, Prentice Hall, 1957.
- KEYNES, John Maynard, : "Relative movements of real wages and output", Economic Journal, nº 49, 1939.  
— "The General Theory of Employment interest and money", Londres, (reimpresión), Macmillan, 1964.
- KIRSCHEN, E.S. Y colaboradores: "Política económica contemporánea", (Teoría general), Vilasar de Mar, Oikos-Tau, 1965.
- KLAPPHOLZ, K y ACASSI, J.: "Methodological prescriptions in economics", Economica, Nº 26, 1959, reproducido en "Readings in microeconomics" ver KAMERSCHEN en "Readings".
- KLEIN, Lawrence R. : "The role of Mathematics in economics", reproducido en "The mathematical Sciences, a collection of essays", ver en C.O.S.R.I.M.S. en "readings".
- KNIGHT, F.H. : "Algunos sofismas en la interpretación del coste social", The Quarterly Journal of Economics , nº 38, 1924, traducido al español en STIGLER y BOULDING "Ensayos sobre la teoría de los precios", ver en "Readings".  
— "El capital y el interés", Encyclopaedia Britannica, vol IV, 1946. Traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", ver FELLNER y HALEY en "Readings"

KNIGHT, Frank H. : "Riesgo, incertidumbre y beneficio", Madrid, Aguilar S.A., 1947.

— "What is truth in economics?", Journal of Political Economy, nº 48, 1940.

KOENIG, W.: "Closed and open systems", Cap. 8º del libro "The place of values in the world of fact", Liveright, 1938, reproducido en "Systems thinking", ver EMERY en "Readings".

KOOPMANS, Tjalling: "Analysis of production as an efficient combination of activities", incluido en "Activity Analysis of production and allocation", ver KOOPMANS, T. en "Readings".

— "Efficient allocation of resources", Econometrica, nº 19, 1951.

— "Measurement without theory", Review of Economics and Statistics, nº 29, 1947.

— "The construction of economic Knowledge", incluido en "Three essays on the state of Economic science", Nueva York. Mc Graw-Hill, 1957

— Ver en "Readings".

KOFLIN, H.T. : "The profit maximization assumption", Oxford economic Papers, nº 15, 1963.

KREMYANSKIY, V.I. : "Certain peculiarities of organisms as a "system" from the point of view of physics, cybernetics and biology", General Systems, nº 5, 1960, reproducido en "Systems thinking", ver EMERY en "Readings"

KRUPP, Sherman Roy: "Equilibrium Theory in Economics and in functional analysis as types of explanation", en "Functionalism in the social sciences", Philadelphia, The American Academy of Political and Social Sciences, 1965.

KUENNE, Robert E. : "Microeconomic theory of the market mechanism", The Macmillan Co. 1968.

— "The theory of general economic equilibrium", Princeton university Press, 1963.

KURATOWSKI, Kazimierz : "Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología", Barcelona, Vicens Vives, 1966.

LAMBERT, Roger: "L'organisation scientifique des entreprises industrielles", Paris, Dunod (3ª ed.), 1947.

LANCASTER, Kelvin : "Mathematical Economics", The Macmillan Co. Nueva York, 1968.

LANDES, David S. : "The unbond Prometheus" (The technological change and industrial development in Western Europe from 1750 to the present), Cambridge. University Press, 1969.

LANCE, Oskar: "Consideraciones acerca de las innovaciones", Review of Economic Statistics, nº 25, 1943, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", ver FELLNER y HALLEY en "Readings".

— "Introducción a la economía cibernética", Madrid, Siglo XXI, 1969  
— "Problemas de economía política del Socialismo", México, Fondo de Cultura Económica, 1965.

— y TAYLOR, F.M. "Sobre la teoría económica del socialismo", Bosch, Barcelona, 1967.

— "The scope and method of economics", The Review of Economic Studies, nº 13, 1945-46. Reproducido en "Readings in microeconomics" ver KAMERSCHEN en "Readings".

LANGER, Susanne K. : "An introduction to symbolic logic", Nueva York. Dover Publications, Inc. (2ª ed.), 1953.

LAVINGTON, F. : "The english capital market", Londres 1921.

LEIBENSTEIN, Harvey : "The proportionality controversy and the theory of production", The Quarterly Journal of Economics, nº 69, 1955, reproducido en "Readings in Microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".

LENTIN, A. y RIVAUD, J. : "Algebra moderna", Madrid, Aguilar, 1965.

LEONATO MARSAL, Ramón : "Planificación y evaluación de inversiones", Escuela de Organización Industrial, Madrid 1966.

LEONTIEFF, Wassily W. : "La structure de l'économie américaine, 1919-1939". Paris, Ed. Génin, 1958.

— "Mathematics in economics", Bulletin of the American Mathematical Society, nº 60, 1954. Reimpreso en LEONTIEFF, V. : "Essays in economics", Oxford University Press, Nueva York, 1966

LEPAGE, Henri: "L'économie en quête d'un nouveau génie", Entreprise, nº 14, 1970, reproducido en "Problèmes économiques", Nº 1197, 1970

LERNER, Abba P. : "Teoría Económica del control, principios de economía del bienestar", México, Fondo de Cultura Económica, 1951.

— "The concept of monopoly and the measurement of monopoly Power", Review of Economic Studies, nº 10, 1943.

LESOURNE, J. : "Il calcolo economico", Milán. Franco Angeli Editori, 1966.

LESTER, R.A. : "Shortcomings of Marginal Analysis for Wage Employment Problems", American Economic Review, Nº 36. 1946



- LEVENSON , Albert M. y COLON, Babette S. : "Returns to scale and the spacing of isoquants", American Economic Review, nº 56, 1966, reproducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".
- LEVINE, Herbert S. : Ver HARDT y otros.
- LEWIS, John P. : "Business Conditions Analysis", Mc Graw Hill Book Co. Inc. 1959.
- LIEBHAFSKY, H.H. : "Diminishing returns and linear homogeneity: Comment" American Economic Review, Nº 54, 1964.
- LILLEY, Richard G. : "Introducción a la economía positiva", Barcelona, Ed. Vicens Vives, (1ª ed.), 1967.
- LOBEZ URQUIA, J.: "Análisis Matemático", (2ª tomo), 1964.
- LUTZ, Friedrich A. : "The theory of interest", Dordrecht, D. Reidel Publishing Co. 1967.
- LLEWELLYN, R.W.: "Programación lineal", Barcelona, Marcombo, 1968.
- MACHLUP, Fritz: "Esseys in Economic Semantics", Nueva York. Norton and Company, Inc. 1967.
- "Marginal analysis and empirical research", American Economic Review, Nº 36, 1946.
- "Monopoly and competition: a classification of Market Positions", American Economic Review, nº 27, 1937, reproducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".
- "Significado del producto marginal" Explorations in economics, 1936, traducido al español en FELLNER W. y HALEY B.F en "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", ver en "readings"
- "The problem of verification in Economics", Southern Economic Journal, nº 22, 1955.
- MAKOVER, Helen y MARSCHAK, Jacob: "Activos, precios y teoría monetaria" Economica, nº 5, 1938
- MANFIELD, Edwin : "Intrafirm rates of diffusion of an innovation", Review of Economics and statistics, Nº 45, 1963.
- "Size of firm, market structure and innovation", Journal of Political Economy, nº 71, 1963.
- "Technical change and the rate of imitation", Econométrica, nº 29 1961.
- "The speed of response of firms to new techniques", Quarterly Journal of Economics, Nº 77, 1963.

- MAREUSE, Maurice: "Le controle de gestion dans les entreprises", Paris, Dunod, 1938.
- MARGOLIS, J. "The analysis of the firm: rationalism, conventionalism and behaviorisme", Journal of Business, nº 31, 1958.
- MARKHAM, Jesse W. : "Market structure, business conduct and innovation", American Economic Review, nº 55, 1965, re roducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".
- MARKOWITZ, Harry: "The utility of wealth", Journal of Political Economy nº 60, 1952.
- MARSCHAK, Jacob: Ver MAKOVER, Helen.
- MARSHALLA, A.: "Principios de economia", Madrid, Aguilar S.A. (4ª ed.) 1963.
- MARX, Carlos: "El Capital, crítica de la economía política", (3 vols), México. Fondo de Cultura Económica, (4ª ed.), 1966.
- MASSE, Pierre: "La elección de las inversiones, criterios y métodos", Barcelona, Sagitario S.A. 1963.
- MATAIX ARACIL, Carlos: "Análisis algebraico e infinitesimal" (tomo I, Cálculo Diferencial), Madrid, ed. Dossat S.A. 1957 (5ª ed)  
— "Aritmética general y mercantil", Madrid, Ed. Dossat S.A. (3ª ed.) 1946.
- MC KENZIE, I.W. : "A method for drawing marginal curves", Journal of Political Economy, nº 58, 1950.  
— "On the existence of a general equilibrium for a competitive market", Econometrica, nº 27, 1959.
- MC KINSEY, J.C.C. "Introducción a la Teoría Matemática de los juegos", Madrid, Aguilar S.A. (2ª ed), 1967.
- MC MANUS, Maurice: Ver ARROW, Kenneth J.
- MEADE, J.E. : "The stationary economy", (vol. I, A principles of political economy), London, Unwin University Books, 1965.  
— "A neo-classical theory of economic growth", London, Unwin University Books, 1962.
- MEJUMDAR, Tapas: "The measurement of utility", Nueva york, Macmillan and Co. Ltd., 1966.
- MELLEROWICZ, Konrad: "Economía de la empresa industrial", Buenos Aires, Ed. "El ateneo".
- MENGER, Carl: "Principles of economics", Glencoe, The Free Press, 1950.

METZLER, Lloyd: "Stability of multiple markets: the Hicks conditiona", Econometrica, nº 13, 1945.

MILL, John Stuart : "Principios de economía política", México, Fondo de Cultura Económica, 1951.

MISES, Ludwig von : "Die Wirtschaftsrechnung im sozialistischen Gemeinwesen", Archiv für Sozialwissenschaften, nº 47, 1920.

MODIGLIANI, Franco : "New developments on the oligopoly front", Journal of political Economy, nº 66, 1958, reproducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "readings".

MOORE, F.G. Ver en "Readings".

MORGENSTERN, Oskar: "On the accuracy of economic observations", Princeton University Press, (2ª ed.), 1963.

— "Limits to the uses of Mathematics in Economics", en Mathematics and the Social Sciences, Philadelphia, The American Academy of Political and Social Science, 1963.

MORISHIMA, M.: "A note on definitions of related goods", Review of Economic Studies, nº 23, 1955-56.

MOSAK, J. "General equilibrium theory and international trade" Blooming-  
ton. Principis Press, 1944.

MUELLER, M.G. Ver "Readings".

MURAKAMI, Y.: "Logic and social choice", Londres, Routledge and Kegan  
Paul Ltd., 1968.

NAGEL, E. : "Assumptions in Economic Theory", American Economic Review,  
Papers and Proceedings, nº 53, 1963.

— y Newman, J.R.: "El teorema de Gödel", Madrid, Tecnos, 1970.

RAHARRO, J. "Las analogías entre la producción y el consumo", Moneda y Crédito, nº 31, 1949

NATANSON, I.P. : "Summation of Infinitely small Quantities", Boston,  
D.C. Heath and Company, 1963.

NEGISHI, Takashi: "The stability of the Competitive Equilibrium. A survey  
article", Econometría, nº 30, 1962.

— Ver HAHN, F.H.

NEUMANN, J. von : "A model of general economic equilibrium", Review of Economic Studies, nº 13, 1945.

— y MORGENSTERN, Oskar: "Theory of games and economic behavior", Nueva York, John Wiley and Sons, (3ª ed. ), 1967.

NEWMAN, James: Ver KASNER, Edward.

NEWMAN, J.R.: Ver NAGEL, E.

NEWMAN, Peter: "The theory of exchange", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965.  
\_\_\_\_ Ver en "Readings"

NIKAIDO, H.: "On the classical multilateral exchange system", Metroeconomica, nº 8, 1956.

NORDQUIST, Gerald L.: "The break<sup>X</sup> of the maximization principle", Quarterly Review of Economics and Business, nº 5 (Fall, 1965), reproducido en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".

NUTTER, G. Warren: "Duopoly, oligopoly and emerging competition", Southern Economic Journal, 1964 (Abril).

OHLIN, Beril: "Algunas notas acerca de la teoría de Estocolmo sobre el ahorro y la inversión", The Economic Journal, nº 47, 1937, traducido al español en "Ensayos sobre el ciclo económico", ver HABERLER, G. en "Readings".

OLIVER (Jr), H.M.: "The Relationship between total output and man-hour out-put in manufacturing industry", Quarterly Journal of Economics, nº 55, 1941.

ORTEGA y GASSET, José: "Meditación de la técnica", Madrid, Rev. de Occidente, (5ª ed.), 1964.

OXENFELD, A. R.: Ver BAXTER, W.T.

PAISH, F.W.: "Business Finance", (2ª ed.), 1961

PAFANDREOU, Andreas G.: "La economía como ciencia", Barcelona, Ed. Ariel, 1961.

PARETO, Vilfredo: "Cours d'économie politique" (Vol I, Oeuvres Complètes), Ginebra, Droz, 1964.

\_\_\_\_ "Manuel d'économie politique", Ginebra, Droz, 1966.

PATINKIN, Don: "Dinero, interés y precios", Madrid, Aguilar, 1959.

\_\_\_\_ "Multiple-plants firms, cartels and imperfect competition", The Quarterly Journal of Economics, nº 61, 1947.

PEARCE, I.F. : "A contribution to demand analysis", Oxford. Clarendon Press 1964.

— "A study of price policy", Economica, nº 23, 1956.

PEARSON, Karl: "The grammar of science", Nueva York, The Meridian Library, 1957.

PELAEZ VEGAS ; Ver ARNAIZ GIL.

PERKINS, Dwight H. : "Market control and planning in communist China", Harvard University Press, 1966.

PETIT, Edmond: "Histoire de l'aviation", Paris, P.U.F. Que sais-je?, 1966.

PFANDER, A.: "Lógica", Madrid, Rev. de Occidente, 1928.

PIAGET, Jean y BERM, E.W.: "Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real", Madrid, Ed. Ciencia Nueva, 1968.

PIATIER, André, CAMUZAC, Pierre y CHAMPADAL, Lucien: "Economie et mathématiques" (tomo I), Paris, P.U.F., 1965.

PIERCE, J.R. : "Símbolos, señales y ruidos, naturaleza y proceso de la comunicación", Madrid, Rev. de Occidente, 1962.

PIERCE, James: "The theory of functions of real variables" (vol I), Nueva York, Dover Publications, Inc. 1959.

PIGOU, A.C. : "Las cajas vacías económicas: respuesta", The Economic Journal, nº 32, 1922, traducido al español en "Ensayos sobre teoría de los precios", ver STIGLER y BOULDING en "Readings".  
— "The economics of Welfare", Londres. Macmillan, 1962.

POPPER, K.R. : "The logic of scientific discovery", Nueva York, Science Editions, 1961.

PORTER, A. "Cybernetics Simplified", Londres, The English Universities Press, Ltd, 1949.

POSEIDONOV, D.A. "Teoría de Juegos y autómatas", México, siglo XXI, 1969.

POWELSON, John P. : "Ingreso nacional y corriente de fondos", México, Fondo de Cultura Económica, 1963 (1ª ed. en inglés 1960)

PRADOS ARRARTE, Jesús: "Inflación y desarrollo económico, (deducciones de un estudio sobre los balances de las sociedades anónimas de Chile)", Madrid, Aguilar, 1956.

— "Principios de una teoría económica dinámica", Barcelona, Ed. Ariel 1970.

— "Problemas básicos de la doctrina económica", Buenos Aires, Ed. Sudamericana, 1950

FUIG ADAM, Pedro: "Curso de geometría métrica" (tomo I), Madrid (3ª ed.) 1952.

QUIRK, James y SAICHELK, Rubín: "Introduction to general equilibrium theory and welfare economics", Mc Graw-Hill Book Co. 1968.

RANCOZ, André: "L'Ordennancement", Paris, Ed. de L'Entreprise Moderne, 1963.

"Readings"

AMERICAN ECONOMIC ASSOCIATION, ROYAL ECONOMIC SOCIETY: "Surveys of economic theory" (vol I), Nueva York, Macmillan 1968.

ANSOFF, H. Igor, director de edición: "Business Strategy", Penguin Books, 1969.

BREIT, William y HOCHMAN, Harold H., directores de edición: "Readings in microeconomics", Londres, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

CARLBERG, B.V. y EDEY, H.C., directores de edición: "Modern Financial Management", Penguin Books, 1969.

CHARLTON, G.P.E., director de edición: "Managerial economics", Penguin Books, 1968.

C.O.S.R.I.M.S. con la colaboración de POOL, George A.W.: "The mathematical sciences, a collection of essays", Cambridge the M.I.T. Press, 1969.

EMERY, P.E., director de edición: "Systems thinking", Penguin Books, 1969.

FELINER, W. y MALEY, B.F., directores de edición: "Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", Madrid, Aguilar, 1961.

GEORGEJOU-ROEGEN, Nicholas: "Analytical Economics, (Issues and problems)", Cambridge, Harvard University Press, 1966.

HABERMER, Gottfried, director de edición: "Ensayos sobre el ciclo económico", México, Fondo de Cultura Económica, 1956.

HAYEK, F.A., director de edición: "Collectivist economic planning", Nueva York, Augustus M. Kelley, 1967.

"Readings":

- KAMERSCHEN, David R., director de edición: "Readings in micro-economics", Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1969.
- KOOPMANS, Tjalling C. y otros: "Activity Analysis of production and allocation", John Wiley and Sons, 1965, reim-presión.
- MOORE, P.G. y HODGES, S.D., directores de edición: "Program-ming for optimal decisions", Penguin Books, 1970.
- MUELLER, M.G., director de edición: "Readings in Macroecono-mics", Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1966.
- NEWMAN, Peter, director de edición: "Readings in Mathematical Economics", Baltimore, John Hopkins Press, 1968.
- SEN, Amartya, director de edición: "Growth economics", Pen-guin Books, 1970.
- STARR, M.K., director de edición: "Management of production". Penguin Books, 1970.
- STIGLER, G.J. y BOULDING, K.E., directores de edición: "Ensa-yos sobre la teoría de los precios", Madrid, Aguilar, 1963.
- STIGLITZ, Joseph E., director de edición: "The collected scientific papers of Paul A. Samuelson" (vol I), Cam-bridge, The M.I.T. press, 1966.
- REICHENBACH, Hans: "The philosophy of space and time", Nueva York. Dover Publications, Inc. 1958.
- REY PASTOR, Julio: "Teoría de las funciones reales", Madrid, 1933.
- REYNOLDS, Lloyd G.: "Relaciones entre los salarios, los costes y los precios", The American Economic Review, nº 32, suplemento, 1942, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de la distribu-ción de la renta", ver FELLNER y HALEY en "Readings".
- RICARDO, David: "Principios de economía política y de tributación", Madrid, Aguilar, 1959.
- RIGAL, J.L.: "Le temps et la pensée physique contemporaine", Paris Dunod, 1968.
- RIOS, Sixto: "Algebra Lineal", Madrid, 1966.
- RIVAUD, J.: Ver LENTIN, A.

- ROBBINS, Lionel: "An essay on the nature. Significance of economic science"  
Londres, Macmillan, 1952.
- ROBERTSON, D.H.: "A Spanish contribution to the theory of fluctuations",  
Economica, nº 5, 1940, reimpreso por Dawson and Sons, Londres, 1964.  
— "Ensayos sobre teoría monetaria", Madrid, Aguilar, 1961.  
— "Esas cajas vacías", The Economic Journal, nº 34, 1924, traducido  
al español en "Ensayos sobre teoría de los precios", ver STIGLER  
y BOULDING en "Readings".  
— "Lecciones sobre principios de economía", Madrid, 1961.
- ROBINSON, E.A.G.: "La dimensión óptima de la empresa", Buenos Aires, Ed.  
"El Ateneo".
- ROBINSON, Joan: "Clasificación de inventos", Review of Economic Studies,  
nº 5, 1937-38, traducido al español en FELLNER y HALEY, "Ensayos  
sobre la teoría de la distribución de la renta", ver en "Readings".  
— "El precio creciente de oferta", Economica, nº 8, 1941, traducido  
al español en "Ensayos sobre teoría de los precios", ver STIGLER  
y BOULDING en "Readings".  
— "Euler's theorem and the Problem of distribution", The Economic  
Journal, nº 44, 1934.  
— "The economics of imperfect competitions", Londres, Macmillan, 1965.  
— "What is perfect competition", The Quarterly Journal of Economics,  
nº 48, 1934.
- ROGERS, H.O.: Ver TOPKINS, B.H.
- ROJO DUQUE, Luis A.: "Keynes y el pensamiento macroeconómico actual", Ma-  
drid, Ed. Tecnos, 1965.  
— "Lecturas sobre la teoría económica de desarrollo", Madrid, Gre-  
dos, 1966.
- ROLPH, Earl: "La doctrina de la productividad marginal descontada", Jour-  
nal of Political Economy, nº 47, 1939, traducido al español en  
"Ensayos sobre la teoría de la distribución de la renta", ver FELL-  
NER y HALEY en "Readings".
- ROSENZWEIG, J.E.: Ver JOHNSON, R.A.
- ROTHSCHILD, K.W.: "Price theory and oligopoly", Economic Journal, nº 57,  
1947, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de los pre-  
cios", ver STIGLER y BOULDING en "readings".
- ROWAN, D.C.: "Output, Inflation and Growth, an introduction to macro-eco-  
nomics", Londres, Macmillan, 1968,
- RUSSELL, Bertrand: "Introduction to Mathematical Philosophy", Londres,  
George Allen and Unwin Ltd, (3ª reimpresión), 1970.  
— "Our Knowledge of the external world", Londres, George Allen and  
Unwin, Ltd, (5ª reimpresión), 1969.



RUSSELL, Bertrand: "The principles of Mathematics", Londres, George Allen and Unwin, Ltd, (8ª reimpresión de la 2ª ed.), 1964.  
— Ver WITHEAD, Alfred N.

SAATY, Thomas L.: "Mathematical Methods of operations research", Mc Graw-Hill book C., Inc. 1959.

SACRISTAN, Manuel: "Introducción a la Lógica y al análisis formal", Barcelona, Ed. Ariel, 1964.

SAMUELSON, Paul : "Curso de economía moderna", Madrid, Aguilar S.A. (6ª ed.), 1958.

— "Economic theory and mathematics, an appraisal", American Economic Review, nº 42, 1952, reimpreso en "Readings in Microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".

— "Foundations of economic analysis", Nueva York, Ateneum, 1965 (1ª ed. 1947).

— "Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration", Review of Economic Statistics, nº 6, 1939, reproducido en "Readings in macroeconomics", ver MUELLER, M.G. en "Readings".

— "Problems of integrability in utility theory", Economica, nº 15, 1950.

— "What classical and neo-classical monetary theory really was", Canadian Journal of Economics, vol 1.

— Ver DORFMAN, R.

— Ver STIGLITZ, J.E. en "Readings"; "The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson".

SAN JOSE AMEZAGA, Javier: "Economía para directivos", Bilbao, Ed. Deusto, 1969.

SAPOSNIK, Rubín: Ver QUIRK, James.

SAVAGE, L.J. : Ver FRIEDMAN, Milton.

SCARF, H. : "An analysis of markets with a large number of participants", Philadelphia, The Princeton University Conference, Ivry Curtis Press 1962.

— "Some examples of global instability of the competitive equilibrium", International Economic Review, nº 1, 1960.

SCHEID, Francis : "Numerical Analysis, theory and problems", Schaum's Outline series. Mc Graw-Hill Book Co., 1968

SCHNEIDER, Erich: "Pricing and Equilibrium", Londres, Unwin University Books, 1962.

— "Teoría de la inversión. Cálculo de la economicidad", Buenos Aires, Ed. "El Ateneo".

- SCHULTZ, Henry: "Marginal Productivity and the general pricing process", Journal of Political Economy, octubre, 1929.
- "The theory and measurement of demand", Chicago, University of Chicago Press, 1938.
- SCHUMPETER, Joseph A. : "Capitalism, Socialism and Democracy", Londres, Unwin University Books, (10ª reimpresión), 1965.
- "History of economic analysis", Londres, George Allen and Unwin Ltd., 1963.
- "Síntesis de la evolución de la ciencia económica y sus métodos", Vilassar de Mar, Oikos-tau, 1967.
- "Teoría del desenvolvimiento económico", México, Fondo de Cultura Económica, 1963.
- "The nature and necessity of a price system", reproducido de su obra "Economic Reconstruction" en "Readings in microeconomics", ver KAMERSCHEN en "Readings".
- SCHWARTZ, J.T. : "Prospects of computer science", reproducido en "The mathematical sciences, a collection of essays", ver C.O.O.S.R.I. M.S. en "Readings".
- SCITOVSKY, T.: "Two concepts of external economies", Journal of political Economy, abril, 1954.
- "Nota sobre el beneficio máximo y sus implicaciones", The Review of Economic Studies, nº 11, 1943, traducido al español en "Ensayos sobre la teoría de los precios", ver en STIGLER y BOULDING en "Readings".
- SEGURA, Julio: "Función de producción, macrodistribución y desarrollo", Madrid, Tecnos, 1969.
- SELIGMAN, Ben B. : "Principales corrientes de la ciencia económica moderna ( El pensamiento económico después de 1970)", Vilassar de Mar, Oikos-tau, 1967.
- SEN, A.K. : "Choice of techniques (An aspect of the theory of planned economic development)", Oxford, Basil Blackwell. 1968.
- Ver "Readings".
- SHANNON, C.E. y WEAVER, V.: "The mathematical theory of communication", Urbana, University of Illinois Press, 1949.
- SHUBIK, M.: "Strategy and market structure", Nueva York, Wiley, 1959.
- SIMON, H.A. "On the concept of organizational goal", Administrative Science Quarterly, vol. 9, 1964.
- "Rational choice and the structure of the environment", Psychological Review , nº 63, 1956, reproducido en "Systems Thinking", ver EMERY en "Readings".
- "Theories of decision-making in economics and behavioral Science", American Economic Review, Nº 49, 1959.

SCITOVSKY, Tibor : "Welfare and competition", Londres, Unwin University Book (6ª reimpresión), 1966.

SMITH, Adam: "Investigación sobre la naturaleza y causas de la riqueza de las naciones", México, Fondo de Cultura Económica, 1958.

SMITH, D.E. : "History of Mathematics" (2 vols), Nueva York, Dover Publication, 1958.

SMITHIES, A. : "The boundaries of the production function and the utility function", Notes in Economics, Notes and Essays contributed in honor of F.W. Taussig, 1936.

SMULLYAN, Raymond M. : "The continuum hypothesis", incluido en "The mathematical Sciences: a collection of essays", ver C.O.S.R.I.M.S. en "Readings".

SNELL, J.L.: Ver KEMENY, J.G.

SOLOM, Babette S.: Ver LEVENSON, Albert M.

SOLOW, R.M.: Ver DORFMAN, R.

SOROKIN, G.: "La planificación de la economía de la U.R.S.S.", Moscú, Editorial Progreso.

SPROUSE, Robert T.: Ver JEADICKE, Robert K.

SRAFFA, Piero: "Las leyes de los rendimientos en régimen de competencia", The Economic Journal, N° 36, 1926, traducido al español en "Ensayos sobre teoría de los precios", ver STIGLER y BOULDING en "Reading: Sulle relazioni fra costo e quantità prodotta", Annali di Economia 1925.

STACKELBER, Heinrich Freiherr von : "Principios de teoría económica", Madrid, Instituto de Estudios Políticos, (3ª ed. española), 1959.

STAHL, Hans: "A development of the economic theory of price index numbers", Review of Economic Studies, n° 2, 1935.

STARR, M.K. : Ver "Readings".

STEVENS, S.S.: "Measurement and Man", Science, 1958  
— "On the theory of scales of measurement", Science, 1946.

STIGLER, George J. : "Essays in the history of economics", The University of Chicago Press, 1965.

— "La teoría de los precios", Madrid, Ed. Revista de Derecho Privado, 1962.

— "Perfect competition, historically contemplated", Journal of Political Economy, n° 65, 1957.

- STIGLER, George J.: "Production and distribution in the short run", Journal of Political Economy, nº 47, 1939, traducido al español en "Ensayos sobre teoría de la distribución de la renta", ver FELLNER y HALEY en "Readings".
- "Professor Lester and the marginalists", American Economic Review, nº 37, 1947.
- "The division of labor is limited by the extent of the market", Journal of Political Economy, junio, 1951.
- "The kinky oligopoly demand curve and rigid prices", Journal of Political Economy, nº 55, 1947.
- Ver STIGLER G.J. y BOULDING, K.E., directores de edición en "Reading"
- STIGLITZ, Joseph E. : Ver en "Readings".
- STONE, Richard: "The role of Measurement in Economics", Cambridge. Cambridge University Press, 1951.
- y STONE, Giovanna: "Renta nacional, contabilidad social y modelos económicos", Vilassar de Mar, Oikos-tau, 1965.
- STROTZ, Robert H. : "Cardinal utility", American Economic Review, Papers and Proceedings, nº 43, 1953.
- SWEEZY, P.M. : "Demand under conditions of oligopoly", Journal of Political Economy, nº 47, 1939, traducido al español en Ensayos sobre la teoría de precios, ver STIGLER y BOULDING en Readings.
- SYLOS LABINI, Paolo: "Oligopolio y progreso técnico", Vilassar de Mar, Oikos-tau, 1966.
- TABEEV, Fikriat y otros: "Planificación del socialismo", Vilassar de Mar, Oikos-tau, 1968.
- TANGRI, Om P. : "Omissions in the Treatment of the law of variable proportions", American Economic Review, Nº 56, 1966.
- TAYLOR, F.M.: Ver LANGE, O.
- THEIL, H. : "Economics and information Theory", Amsterdam. North-Holland 1967.
- THOMPSON, G.L. : Ver KEMENY, J.G.
- THUNEN, J.H.von : "Der isolierte statt", Jena, Fisher, 1930.
- TINTNER, Gerhard: "A contribution to the non-static theory of production" en Studies in Mathematical Economics and Econometrics, 1942.
- "Methodology of mathematical economics and econometrics", The University of Chicago Press, 1968.

- TOPKINS, B.H. y ROGERS, H.O.: "Man-hours of labor per unit of output in steel", Modern Labour Review, nº 40, 1935.
- TORRE, José Manuel de la: "Lecturas de Teoría Económica", Madrid, Guadiana de Publicaciones, S.A. 1970
- TOULMIN, Stephen y GOODFIELD, June: "El descubrimiento del tiempo", Buenos Aires, Ed. Paidós, 1968.
- TRIFFIN, Robert: "Monopolistic competition and general equilibrium Theory", Cambridge, Harvard University Press, 1962.
- TURNBULL, H.W.: "Los grandes matemáticos", Barcelona, Credsá, Ediciones y Publicaciones, 1968.
- TUSTIN, A.: "The Mechanism of Economic Systems", Londres, Heinemann, 1953.
- Varios: "Round table on cost functions and their relation to imperfect competition", American Economic Review, nº 30, 1940
- VILAR, Pierre: "Oro y Moneda en la historia (1450-1920)", Barcelona, Ed. Ariel, 1969.
- VINER, J.: "Cost curves and supply curves", Zeitschrift für Nationalökonomie, nº 3, 1931, traducido al español en STIGLER y BOULDING, "Ensayos sobre teoría de los precios", ver en "Readings".
- WALD, Abraham: "Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie", Zeitschrift für Nationalökonomie, nº 7, 1936, hay traducción inglesa: "On some systems of equation of mathematical economics", Econometrica, nº 19, 1951.
- WALRAS, Leon: "Elements of pure economics or the theory of social wealth", Londres, George Allen and Unwin Ltd., 1965.
- WEAVER, W.: Ver SHANNON, C.E.
- WEINGARTNER, H.M.: "Equipment replacement analysis: a note on the optimum investment period", Industrial Management Review, nº 7, 1965.
- WHITTLE, P.: "Prediction and regulation", Londres, English Universities Press, 1963.
- WICKSELL, Knut: "Lectures on political economy" (vol I y II), Nueva York, Augustus M/ Kelley, 1966.
- WIENER, A.J.: Ver KAHN, H.
- WIENER, Norbert: "Cybernetics, or control and communication in the animal and the Machine", Cambridge, The M.I.T. Press, 1965.

WIESER, Friedrich von : "Natural Value", Nueva York, Kelley and Millan, Inc. 1956.

WIGHTMAN, A.S. : "Analytic functions and elementary particles", incluido en "The mathematical sciences: a collection of essays", ver C.O.S.R.I.M.S. en "Readings".

WITWHEAD, Alfred North y RUSSELL, Bertrand: "Principia Mathematica", Cambridge, University Press, 1967.

WOLD, Herman O.A. y JUREEN, Lars: "Análisis de la demanda", (Un estudio de econometría)", Madrid, C.S.I.C., 1956.

WOOTTON, B. : "The value of scientific method in basic issues of american democracy", Nueva York, Appleton Century Crofts, 1956.

YAMANE, Taro : "Matemáticas para economistas", Barcelona, E. Ariel, 1965.

ZAMORA, Francisco: "Tratado de Teoría Económica", México, Fondo de Cultura Económica, 1953.

ZEUTHEN, F. : "Problems of monopoly and economic welfare", Londres, Routledge and Kegan Paul, 1933.

\_\_\_\_ "Teoría y método en economía", Madrid, Aguilar, 1960.

ZIENKIEWICZ, O.C. y CHEUNG, Y.K. : "The finite element method in structural and continuum mechanics", Mc Graw, Hill, 1967.

ZOTOFF, A.W. : "Notes on the mathematical Theory of production", Economic Journal, 1923 (marzo).

ZWEIG, Ferdinand: "The planning of free societies", Londres, Lecker and Warburg, 1942.

oooooooo